

Επειδή $f : [0,1] \rightarrow (0,1)$, θα είναι

$$0 < f(x) < 1 \quad (1), \quad \text{για κάθε } x \in [0,1]$$

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = 2x - F(x) - 1$

Η h είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών

$$h(0) = 2 \cdot 0 - F(0) - 1 \stackrel{F(0)=0}{=} -1 < 0$$

$$h(1) = 2 \cdot 1 - F(1) - 1 = 1 - F(1) \stackrel{(\text{επεξήγηση})}{>} 0$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η h έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Ακόμη η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με

$$h'(x) = 2 - F'(x) \stackrel{F'(x)=f(x)}{=} 2 - f(x) \stackrel{(1)}{>} 0$$

επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα και άρα $1 - 1$ και άρα έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Τελικά η h έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$ άρα η εξίσωση

$$2x - F(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x - F(x) < 1 \quad \text{έχει μοναδική λύση στο διάστημα } (0,1)$$

επεξήγηση

Η συνάρτηση $g(x) = F(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ διότι

$$g'(x) = F'(x) - 1 \stackrel{F'(x)=f(x)}{\Rightarrow} g'(x) = f(x) - 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} g'(x) < 0 \quad \text{για κάθε } x \in [0,1]$$

$$\text{άρα για κάθε } x > 0 \stackrel{g \searrow}{\Rightarrow} g(x) < g(0) \Rightarrow F(x) - x < F(0) - 0 \stackrel{F(0)=0}{\Rightarrow}$$

$$F(x) - x < 0 \stackrel{x=1}{\Rightarrow} F(1) - 1 < 0 \Rightarrow 1 - F(1) > 0$$