

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Έχουμε

η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής οπότε ,

$$\text{υπάρχει τουλάχιστον ένα } \xi_1 \in (\alpha, \beta) , \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Επίσης

εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση f στο διάστημα $[\gamma, \delta]$.

Έχουμε

η f είναι συνεχής στο $[\gamma, \delta]$

η f είναι παραγωγίσιμη στο (γ, δ)

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής οπότε ,

$$\text{υπάρχει τουλάχιστον ένα } \xi_2 \in (\gamma, \delta) , \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(\delta) - f(\gamma)}{\delta - \gamma} \quad (2)$$

$$\text{Είναι } 0 < \alpha < \xi_1 < \beta < \gamma < \xi_2 < \delta , \text{ άρα } 0 < \xi_1 < \xi_2 \quad (3)$$

$$\text{Ακόμη } \alpha + \delta = \beta + \gamma \Rightarrow \beta - \alpha = \gamma - \delta \quad (4)$$

Ακόμη επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ προκύπτει ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Οπότε

$$(3) \Rightarrow \xi_1 < \xi_2 \xRightarrow{f' \nearrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \xRightarrow{(1), (2)} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \frac{f(\delta) - f(\gamma)}{\delta - \gamma} \xRightarrow{(4)} \frac{\beta - \alpha > 0}{\delta - \gamma > 0}$$

$$\Rightarrow f(\beta) - f(\alpha) < f(\delta) - f(\gamma) \Rightarrow f(\alpha) + f(\delta) > f(\beta) + f(\gamma)$$