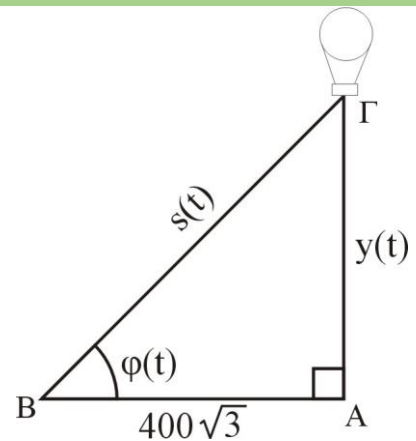


Έστω Α το σημείο απογείωσης, Β η θέση της διόπτρας, η θέση του αερόστατου, $y(t)$ το ύψος της διόπτρας, και $s(t)$ η απόσταση της διόπτρας από το αερόστατο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα

σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θα είναι (όλα τα μήκη είναι σε m, οι γωνίες σε rad και οι χρόνοι σε min)



$$y'(t) = y'(t_0) = 100\sqrt{3} \quad (1)$$

$$y(t_0) = 400 \quad (2)$$

α) Αρκεί να υπολογίσουμε το $\varphi'(t_0)$

Στο τρίγωνο ABΓ έχουμε

$$\varepsilon\varphi\varphi(t) = \frac{y(t)}{400\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} \frac{1}{\sin^2\varphi(t)} \varphi'(t) = \frac{y'(t)}{400\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(t) = \frac{y'(t)}{400\sqrt{3}} \sin^2\varphi(t) \xrightarrow{\text{θέτουμε } t=t_0} \varphi'(t_0) = \frac{y'(t_0)}{400\sqrt{3}} \sin^2\varphi(t_0) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \varphi'(t_0) = \frac{100\sqrt{3}}{400\sqrt{3}} \sin^2\varphi(t_0) \Rightarrow \varphi'(t_0) = \frac{1}{4} \sin^2\varphi(t_0) \quad (3)$$

Πρέπει τώρα να υπολογίσουμε το $\sin\varphi(t_0)$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ από το πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουμε

$$(400\sqrt{3})^2 + y^2(t_0) = s^2(t_0) \xrightarrow{(2)} 400^2 \cdot 3 + 400^2 = s^2(t_0)$$

$$\Rightarrow s^2(t_0) = 4 \cdot 400^2 \Rightarrow s(t_0) = 800$$

$$\text{Άρα } \sin\varphi(t_0) = \frac{400\sqrt{3}}{s(t_0)} \Rightarrow \sin\varphi(t_0) = \frac{400\sqrt{3}}{800} \Rightarrow \sin\varphi(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

$$\text{Έτσι } (3) \xrightarrow{(4)} \varphi'(t_0) = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \Rightarrow \varphi'(t_0) = \frac{3}{16} \text{ rad/min}$$

β) Αρκεί να υπολογίσουμε το $s'(t_0)$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ από το πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουμε

$$s^2(t) = y^2(t) + (400\sqrt{3})^2 \Rightarrow s(t) = \sqrt{y^2(t) + 3 \cdot 400^2} \Rightarrow$$

$$s'(t) = \frac{2y(t)y'(t)}{2\sqrt{y^2(t) + 3 \cdot 400^2}} \xrightarrow{\text{θέτουμε } t=t_0} s'(t_0) = \frac{2y(t_0)y'(t_0)}{2\sqrt{y^2(t_0) + 3 \cdot 400^2}} \xrightarrow{(1), (2)}$$

$$\Rightarrow s'(t_0) = \frac{100\sqrt{3} \cdot 400}{\sqrt{400^2 + 3 \cdot 400^2}} \Rightarrow s'(t_0) = \frac{40000\sqrt{3}}{800} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s'(t_0) = 50\sqrt{3} \text{ m/min}$$

γ) Αν $E(t)$, το εμβαδό του τριγώνου θα είναι

$$E(t) = \frac{400\sqrt{3} \cdot y(t)}{2} \Rightarrow E'(t) = \frac{400\sqrt{3} \cdot y'(t)}{2} \xrightarrow{\text{θέτουμε } t=t_0} E'(t_0) = \frac{400\sqrt{3} \cdot y'(t_0)}{2} \xrightarrow{(1)}$$

$$\Rightarrow E'(t_0) = \frac{400\sqrt{3} \cdot 100\sqrt{3}}{2} \Rightarrow E'(t_0) = 60.000 \text{ m}^2 / \text{min}$$