

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων, με

$$f'(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x \ln \frac{3}{7} + \left(\frac{4}{7}\right)^x \ln \frac{4}{7} \Rightarrow f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ οπότε η } f$$

$\ln \frac{3}{7} < \ln 1 \Rightarrow \ln \frac{3}{7} < 0$
 $\ln \frac{4}{7} < \ln 1 \Rightarrow \ln \frac{4}{7} < 0$
 $\left(\frac{3}{7}\right)^x > 0, \left(\frac{4}{7}\right)^x > 0$

είναι γνησίως φθίνουσα

β) Παρατηρούμε καταρχήν ότι το 1 είναι ρίζα της παραπάνω εξίσωσης διότι
 $3^1 + 4^1 = 7^1 \Leftrightarrow 3 + 4 = 7$ που ισχύει

$$\text{Ακόμη } 3^x + 4^x = 7^x \xLeftrightarrow{\text{διαιρούμε με } 7^x \neq 0} \frac{3^x}{7^x} + \frac{4^x}{7^x} = \frac{7^x}{7^x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1$$

και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη (άρα και 1 – 1) συμπεραίνουμε ότι η f
 (άρα και η εξίσωση $3^x + 4^x = 7^x$) έχει το πολύ μία ρίζα
 Οπότε τελικά η εξίσωση $3^x + 4^x = 7^x$, έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$