35.28

α) $f'(x)=\ln x+1 \Rightarrow f''(x)=\frac{1}{x} \overset{x>0}{\Rightarrow} f''(x)>0$

β) Είναι

$\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}$ (διότι $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow 2\alpha<\alpha+\beta \Leftrightarrow \alpha<\beta$ που ισχύει)

και

$\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$ (διότι $\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta \Leftrightarrow \alpha+\beta<2\beta \Leftrightarrow \alpha<\beta$ που ισχύει)

δηλαδή είναι $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$

Έτσι

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha} \Rightarrow f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta-2\alpha}{2}} \Rightarrow f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

(1)

Ομοίως η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}} \Rightarrow f'(\xi_2)\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{2\beta-\alpha-\beta}{2}} \Rightarrow f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

(2)

Όμως επειδή $f''(x)>0$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε

$$\xi_1<\xi_2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}<\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \overset{\frac{\beta-\alpha}{2}>0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)<f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Rightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<f(\beta)+f(\alpha)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\frac{\alpha+\beta}{\cancel{2}}\ln\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta\ln\beta+\alpha\ln\alpha\Rightarrow \boxed{(\alpha+\beta)\ln\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta\ln\beta+\alpha\ln\alpha}$$