

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = G(x) + \ln(x+1) + 1 - e^{x^2}$, $x \in (-1, +\infty)$

η h θα είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με

$$h'(x) = G'(x) + [\ln(x+1)]' + (1)' - (e^{x^2})' \Rightarrow h'(x) = g(x) + \frac{1}{x+1} - 2xe^{x^2} \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι $h(0) = G(0) + \ln(0+1) + 1 - e^{0^2} \stackrel{G(0)=0}{\Rightarrow} h(0) = 0 \quad (2)$

Ακόμη επειδή για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$G(x) + \ln(x+1) + 1 \geq e^{x^2} \Rightarrow G(x) + \ln(x+1) + 1 - e^{x^2} \geq 0 \Rightarrow h(0) \geq 0 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} h(x) \geq h(0)$$

Άρα για κάθε $x > -1$ είναι $h(x) \geq h(0)$ και άρα η h παρουσιάζει ακρότατο
(ελάχιστο) στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι

$$h'(0) = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} g(0) + \frac{1}{0+1} - 2 \cdot 0 \cdot e^{0^2} = 0 \Rightarrow g(0) + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{g(0) = -1}$$