

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f^2(x) - x^2$, $x \in [\alpha, \beta]$

Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την h στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Πράγματι

η h είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ως πράξεις συνεχών

η h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) ως πράξεις παραγωγισίμων

$$\text{με } h'(x) = [f^2(x)]' - (x^2)' \Rightarrow h'(x) = 2f(x)f'(x) - 2x \quad (1)$$

$$h(\alpha) = f^2(\alpha) - \alpha^2$$

$$h(\beta) = f^2(\beta) - \beta^2$$

$$\text{Όμως } f^2(\alpha) - f^2(\beta) = \alpha^2 - \beta^2 \Rightarrow f^2(\alpha) - \alpha^2 = f^2(\beta) - \beta^2 \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε ,

$$\text{υπάρχει τουλάχιστον ένα } c \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε } h'(c) = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 2f(c)f'(c) - 2c = 0 \Rightarrow$$

$$f(c)f'(c) = c$$