

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \int_0^x f(t)dt - \eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, σύμφωνα με γνωστή πρόταση ορίζεται η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$, η οποία είναι και παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$

Οπότε εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την h στο διάστημα $[0, \pi]$. Πράγματι

η h είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$ ως διαφορά συνεχών

η h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, \pi)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων με

$$h'(x) = \left(\int_0^x f(t)dt \right)' - (\eta\mu x)' \Rightarrow h'(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu x \quad (1)$$

$$h(0) = \int_0^0 f(t)dt - \eta\mu 0 = 0$$

$$h(\pi) = \int_0^\pi f(t)dt - \eta\mu\pi \stackrel{\int_0^\pi f(t)dt=0}{=} 0$$

$$\text{Άρα } h(0) = h(\pi) = 0$$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε,

$$\text{υπάρχει τουλάχιστον ένα } \alpha \in (0, \pi) \text{ τέτοιο ώστε } h'(\alpha) = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(\alpha) - \sigma\upsilon\nu\alpha = 0 \Rightarrow f(\alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha$$