

Έχουμε ότι

$$f'(1) = h'(1) = 2006 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = 2006$$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = 2006 \quad (1)$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = 2006 \quad (2)$$

Ακόμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=1} f(1) \leq g(1) \leq h(1) \xRightarrow{f(1)=h(1)} f(1) \leq g(1) \leq f(1) \Rightarrow \\ \Rightarrow g(1) = f(1)$$

Άρα $f(1) = g(1) = h(1)$ (3)

Για κάθε $x > 1$ ισχύει

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \xRightarrow{\text{αφαιρούμε το } f(1)} f(x) - f(1) \leq g(x) - f(1) \leq h(x) - f(1) \xRightarrow{f(1)=g(1)=h(1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) - f(1) \leq g(x) - g(1) \leq h(x) - h(1) \xRightarrow{\text{διαιρούμε με } x-1 > 0} \Rightarrow$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \leq \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \leq \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} \quad (4)$$

Από τις (1) και (4) και σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = 2006 \quad (5)$$

Ομοίως για κάθε $x < 1$ ισχύει

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \xRightarrow{\text{αφαιρούμε το } f(1)} f(x) - f(1) \leq g(x) - f(1) \leq h(x) - f(1) \xRightarrow{f(1)=g(1)=h(1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) - f(1) \leq g(x) - g(1) \leq h(x) - h(1) \xRightarrow{\text{διαιρούμε με } x-1 < 0} \Rightarrow$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \geq \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \geq \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} \quad (6)$$

Από τις (2) και (6) και σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = 2006 \quad (7)$$

Οπότε

$$(2), (7) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = 2006$$

Άρα η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $g'(1) = 2006$

