

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση g στο διάστημα $[α, x_0]$.
Έχουμε

η g είναι συνεχής στο $[α, x_0]$

η g είναι παραγωγίσιμη στο $(α, x_0)$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής οπότε

$$\text{υπάρχει τουλάχιστον ένα } \xi_1 \in (α, x_0) \text{ , τέτοιο ώστε } g'(\xi_1) = \frac{g(x_0) - g(α)}{x_0 - α} \quad (1)$$

Επίσης

εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση g στο διάστημα $[x_0, β]$.

Έχουμε

η g είναι συνεχής στο $[x_0, β]$

η g είναι παραγωγίσιμη στο $(x_0, β)$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής οπότε ,

$$\text{υπάρχει τουλάχιστον ένα } \xi_2 \in (x_0, β) \text{ , τέτοιο ώστε } g'(\xi_2) = \frac{g(β) - g(x_0)}{β - x_0} \quad (2)$$

$$\text{Επειδή όμως } \frac{g(x_0) - g(α)}{x_0 - α} = \frac{g(β) - g(x_0)}{β - x_0} \stackrel{(1), (2)}{\Rightarrow} g'(\xi_1) = g'(\xi_2) \quad (3)$$

Οπότε εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle για την g' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$. Πράγματι

η g' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$

η g' είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2)

$$g'(\xi_1) = g'(\xi_2) \text{ , λόγω της (3)}$$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε ,

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ άρα και $\xi \in (α, β)$, τέτοιο ώστε $g''(\xi) = 0$