

Είναι $f'(x) = e^{x^2}$. Έτσι

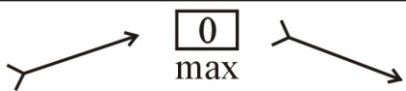
Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = 2f(x) - e^{x^2} + e$, $x \in \mathbb{R}$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$h'(x) = 2e^{x^2} - e^{x^2} 2x = 2e^{x^2} (1-x)$$

$$\text{Ακόμη } h(1) = 2f(1) - e^{1^2} + e \stackrel{f(1)=0}{=} 0$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$			

Οπότε

$$\text{Αν } x \in (-\infty, 1] \Rightarrow x \leq 1 \stackrel{h \nearrow \text{ στο } x \in (-\infty, 1]}{\Rightarrow} h(x) \leq h(1) \stackrel{h(1)=0}{\Rightarrow} h(x) \leq 0$$

$$\text{Αν } x \in [1, +\infty) \Rightarrow x \geq 1 \stackrel{h \searrow \text{ στο } (-\infty, 1]}{\Rightarrow} h(x) \leq h(1) \stackrel{h(1)=0}{\Rightarrow} h(x) \leq 0$$

Άρα τελικά για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$h(x) \leq 0 \Rightarrow 2f(x) - e^{x^2} + e \leq 0 \Rightarrow 2f(x) \leq e^{x^2} - e$$