

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - \ln x + 2$, $x \in (0, +\infty)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = f'(x) - (\ln x)' - (2)' \Rightarrow h'(x) = f'(x) - \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } h(e^2) = f(e^2) - \ln e^2 + 2 \stackrel{f(e^2)=0}{\Rightarrow} h(e^2) = 0 \quad (2)$$

Ακόμη για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει

$$f(x) \leq \ln x - 2 \Rightarrow f(x) - \ln x + 2 \leq 0 \Rightarrow h(x) \leq 0 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} h(x) \leq h(e^2)$$

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $h(x) \leq h(e^2)$ και άρα η h παρουσιάζει ακρότατο

(μέγιστο) στο $x_0 = e^2$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι $h'(e^2) = 0$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} f'(e^2) - \frac{1}{e^2} = 0 \Rightarrow e^2 f'(e^2) - 1 = 0$$