

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, x]$, ως εκθετική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, x)$, ως εκθετική με $f'(x) = e^x$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow e^\xi = \frac{e^x - e^0}{x} \Rightarrow e^\xi = \frac{e^x - 1}{x} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{x < e^x - 1 < xe^x} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} e^0 < e^\xi < e^1 \Leftrightarrow 0 < \xi < 1$$

που ισχύει διότι $\xi \in (0, x) \stackrel{x \in (0,1)}{\Rightarrow} \xi \in (0,1)$