

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[0, 2000]$  , σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής θα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή , δηλαδή θα υπάρχουν αριθμοί  $\mu, M \in \mathbb{R}$  , τέτοιοι ώστε

$$\mu \leq f(x) \leq M \quad (1) \quad \text{για κάθε } x \in [0, 2000]$$

και σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών το σύνολο τιμών της  $f$  , είναι το

$$f(A) = [\mu, M]$$

Σύμφωνα με την (1) θα ισχύει

$$\left. \begin{array}{l} \mu \leq f(1994) \leq M \\ \mu \leq f(1995) \leq M \\ \mu \leq f(1996) \leq M \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{προσθέτουμε κατά μέλη} \\ \Rightarrow 3\mu \leq f(1994) + f(1995) + f(1996) \leq 3M \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \mu \leq \frac{f(1994) + f(1995) + f(1996)}{3} \leq M \quad (2)$$

Έστω τώρα  $x_1, x_2 \in [0, 2000]$  με  $f(x_1) = \mu$  και  $f(x_2) = M$ . Τότε

$$(2) \Rightarrow f(x_1) \leq \frac{f(1994) + f(1995) + f(1996)}{3} \leq f(x_2)$$

και επειδή το σύνολο τιμών της  $f$  , είναι το  $f([0, 2000]) = [\mu, M]$  , θα υπάρχει  $\xi \in [0, 2000]$  , τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \frac{f(1994) + f(1995) + f(1996)}{3}$$