

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$

Έχουμε

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x} + 2 \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f''(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \quad (1)$$

Όμως

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x} + 2 \xrightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } x} xf'(x) = f(x) + 2x \Rightarrow xf'(x) - f(x) = 2x \quad (2)$$

Άρα

$$(1) \Rightarrow f''(x) = \frac{2x}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x} \xrightarrow{x>0} f''(x) > 0 \quad . \text{ Άρα η } f \text{ είναι κυρτή στο } (0, +\infty)$$