

35.13

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = a^x - 1 - \ln(1+x)$, $x \in (-1, +\infty)$

Η f θα είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\text{με } f'(x) = (a^x)' - [\ln(1+x)]' = a^x \ln a - \frac{1}{1+x} \quad (1)$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } f(0) = a^0 - 1 - \ln(1+0) \Rightarrow f(0) = 0 \quad (2)$$

Ακόμη για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ ισχύει

$$a^x \geq 1 + \ln(1+x) \Rightarrow a^x - 1 - \ln(1+x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} f(x) \geq f(0)$$

Άρα για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ είναι $f(x) \geq f(0)$ και άρα η f παρουσιάζει ακρότατο
(ελάχιστο) στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι $f'(0) = 0$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} a^0 \ln a - \frac{1}{1+0} = 0 \Rightarrow \ln a - 1 = 0 \Rightarrow \ln a = 1 \Rightarrow a = e$$