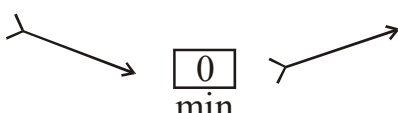


α) Θέτουμε $h(x) = e^x - ex$, $x \in \mathbb{R}$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = e^x - e$. Άρα

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - e = 0 \Leftrightarrow e^x = e \Leftrightarrow x = 1$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$			
		$\boxed{0}$ min	

Από τον πίνακα φαίνεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$h(x) \geq h(1) \Rightarrow h(x) \geq 0 \Rightarrow e^x - ex \geq 0 \Rightarrow e^x \geq ex$$

β) Θέτουμε $g(x) = e^x - 1 - \ln(1+x)$, $x \in [0, +\infty)$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $g'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$ (1)

Η g' είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $g''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2}$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι $g''(x) > 0$, άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα οπότε

$$\text{για κάθε } x > 0 \Rightarrow \overset{g' \nearrow}{g'(x)} > g'(0) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} g'(x) > e^0 - 1 \Rightarrow g'(x) > 0$$

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα οπότε

$$\text{για κάθε } x > 0 \Rightarrow \overset{g \nearrow}{g(x)} > g(0) \Rightarrow e^x - 1 - \ln(1+x) > e^0 - 1 - \ln(1+0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x - 1 - \ln(1+x) > 0$$

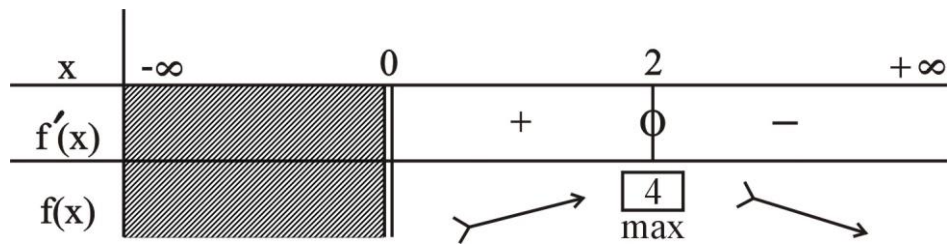
γ) Θέτουμε $f(x) = \frac{x^2}{e^{x-2}}$, $x \in (0, +\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \frac{2xe^{x-2} - x^2e^{x-2}}{(e^{x-2})^2} = \frac{e^{x-2}(2x - x^2)}{(e^{x-2})^2} = \frac{e^{x-2}x(2-x)}{(e^{x-2})^2}.$$

$$\text{Άρα } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα



Από τον πίνακα φαίνεται ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει

$$f(x) \leq f(2) \Rightarrow f(x) \leq 4 \Rightarrow \frac{x^2}{e^{x-2}} \leq 4 \stackrel{e^{x-2} > 0}{\Rightarrow} 4e^{x-2} \geq x^2$$