

Έστω λ_1, λ_2 θετικοί αριθμοί. Τότε

Επειδή η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής θα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλαδή θα υπάρχουν αριθμοί $\mu, M \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε $\mu \leq f(x) \leq M$ (1) για κάθε $x \in [a, b]$

Άρα σύμφωνα με την (1) θα ισχύει

$$\left. \begin{array}{l} \mu \leq f(a) \leq M \\ \mu \leq f(b) \leq M \end{array} \right\} \xRightarrow{\lambda_1, \lambda_2 > 0} \left. \begin{array}{l} \lambda_1 \mu \leq \lambda_1 f(a) \leq \lambda_1 M \\ \lambda_2 \mu \leq \lambda_2 f(b) \leq \lambda_2 M \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}} \Rightarrow$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \mu \leq \lambda_1 f(a) + \lambda_2 f(b) \leq (\lambda_1 + \lambda_2) M \xRightarrow{\lambda_1 + \lambda_2 > 0}$$

$$\Rightarrow \mu \leq \frac{\lambda_1 f(a) + \lambda_2 f(b)}{\lambda_1 + \lambda_2} \leq M \quad (2)$$

Έστω τώρα $x_1, x_2 \in [a, b]$ με $f(x_1) = \mu$ και $f(x_2) = M$. Τότε

$$(2) \Rightarrow f(x_1) \leq \frac{\lambda_1 f(a) + \lambda_2 f(b)}{\lambda_1 + \lambda_2} \leq f(x_2)$$

Αν υποθέσουμε ότι $x_1 < x_2$ τότε επειδή η f είναι συνεχής, σύμφωνα το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[x_1, x_2]$, θα υπάρχει

$\xi \in [x_1, x_2]$ άρα $\xi \in [a, b]$, τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \frac{\lambda_1 f(a) + \lambda_2 f(b)}{\lambda_1 + \lambda_2} \xRightarrow{\lambda_1 + \lambda_2 > 0} \lambda_1 f(a) + \lambda_2 f(b) = (\lambda_1 + \lambda_2) f(\xi)$$

Ομοίως και αν οι λ_1, λ_2 είναι αρνητικοί αριθμοί