

Υπαρξη

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) + x \cdot \ln x - x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, e]$

$$\left. \begin{aligned} h(1) &= f(1) + 1 \cdot \ln 1 - 1 = f(1) - 1 \stackrel{f(x) < 1}{\Rightarrow} h(1) < 0 \\ h(e) &= f(e) + e \cdot \ln e - e = f(e) + e - e = f(e) \stackrel{f(x) > 0}{\Rightarrow} h(e) > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(1) \cdot h(e) < 0$$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 \cdot \ln x_0 - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 \cdot \ln x_0 = x_0$$

Μοναδικότητα

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ με

$$h'(x) = f'(x) + \ln x + \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} - 1 \Rightarrow h'(x) = f'(x) + \ln x \stackrel{\substack{f'(x) \geq 0 \\ \text{για } x > 1 \Rightarrow \ln x > 0}}{\Rightarrow} h'(x) > 0 \text{ για κάθε}$$

$x \in (1, e)$ οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$ άρα και 1-1.

Επομένως το παραπάνω x_0 είναι μοναδικό