

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. 334 , 335

Α2. Θεωρία σελ. 332

Α3. α) Λάθος

Αιτιολόγηση (με αντιπαράδειγμα)

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ και $g(x) = 1$ για κάθε $x \in [0, 4]$

Είναι

$$\int_0^4 f(x) dx = \int_0^4 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 8$$

$$\int_0^4 g(x) dx = \int_0^4 1 dx = [x]_0^4 = 4 - 0 = 4$$

$$\text{Άρα είναι } \int_0^4 f(x) dx > \int_0^4 g(x) dx$$

και βέβαια δεν ισχύει $f(x) > g(x)$, για κάθε $x \in [0, 4]$

β) Σωστό

Αιτιολόγηση

Έστω ότι δεν υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ η f είναι συνεχής και μη μηδενιζόμενη πράγμα που σημαίνει ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ δηλαδή ισχύει

$$\text{είτε } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta] \text{ και άρα } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$$

Άτοπο

$$\text{είτε } f(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta] \text{ και άρα } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < 0$$

Άτοπο

Α4. β

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x > 0$, έχουμε

$$\text{Ακόμη , } 3F(x) = 3xf(x) + 2x^3 - 6x^2 - 5 \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} \Rightarrow$$

$$\cancel{3f(x)} = \cancel{3f(x)} + 3xf'(x) + 6x^2 - 12x \Rightarrow 3xf'(x) = -6x^2 + 12x \xrightarrow{x \neq 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cancel{3x}(-2x^2 + 6x)}{\cancel{3x}} \Rightarrow f'(x) = -2x + 4$$

Β2. Από το προηγούμενο ερώτημα για κάθε $x > 0$, έχουμε

$$f'(x) = -2x + 4 \Rightarrow f'(x) = (-x^2 + 4x)' \Rightarrow f(x) = -x^2 + 4x + c \quad (2)$$

Ακόμη

$$3F(x) = 3xf(x) + 2x^3 - 6x^2 - 5 \quad \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=1}$$

$$\Rightarrow 3F(1) = 3 \cdot 1 \cdot f(1) + 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 - 5 \quad \xRightarrow{F(1)=0} \quad 3f(1) = 9 \Rightarrow f(1) = 3 \quad (3)$$

$$(2) \quad \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=1} \quad f(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 + c \quad \xRightarrow{(3)} \quad 3 = 3 + c \Rightarrow c = 0 \quad (4)$$

$$\text{Οπότε } (2) \quad \xRightarrow{(4)} \quad f(x) = -x^2 + 4x$$

B3. Είναι $f(1) = 3$ και $f'(1) = 2$. Οπότε η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(1, f(1))$ έχει εξίσωση

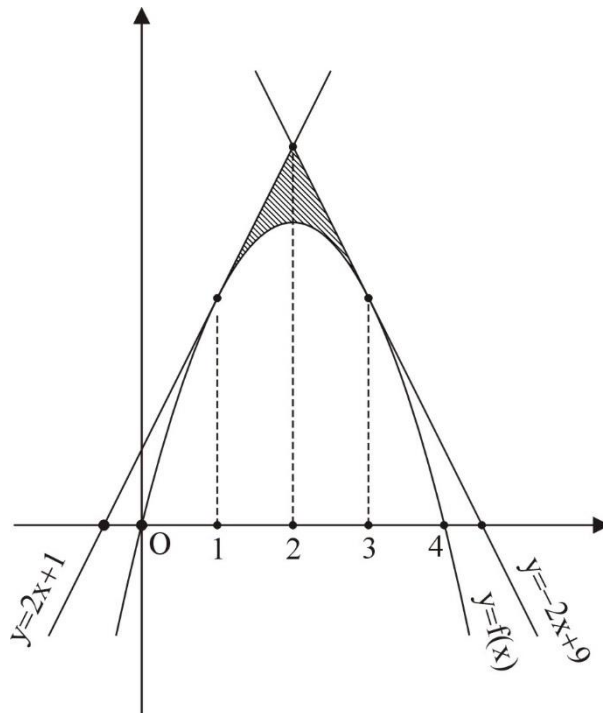
$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 3 = 2x - 2 \Rightarrow y = 2x + 1$$

Ακόμη

είναι $f(3) = 3$ και $f'(3) = -2$. Οπότε η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(3, f(3))$ έχει εξίσωση

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3) \Rightarrow y - 3 = -2x + 6 \Rightarrow y = -2x + 9$$

Το χωρίο του οποίου ζητείται το εμβαδό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα το εμβαδό του ζητούμενου χωρίου είναι

$$E = \int_1^2 [(2x + 1) - f(x)] dx + \int_2^3 [(-2x + 9) - f(x)] dx =$$

$$= \int_1^2 [2x + 1 + x^2 - 4x] dx + \int_2^3 [-2x + 9 + x^2 - 4x] dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^2 (x^2 - 2x + 1) dx + \int_2^3 (x^2 - 6x + 9) dx = \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_2^3 = \\
&= \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 1 \right) + \left(\frac{3^3}{3} - 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 3 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 \right) = \\
&= \boxed{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

B4. Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Ο πίνακας μονοτονίας της f είναι ο παρακάτω

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$		4 max	

Οπότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 2$ και η εφαπτόμενη της στο σημείο αυτό είναι

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4$$

Αν E_1 και E_2 είναι τα δύο μέρη στα οποία η $y = 4$ χωρίζει το χωρίο του προηγούμενου ερωτήματος και E_1 είναι το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου, τότε

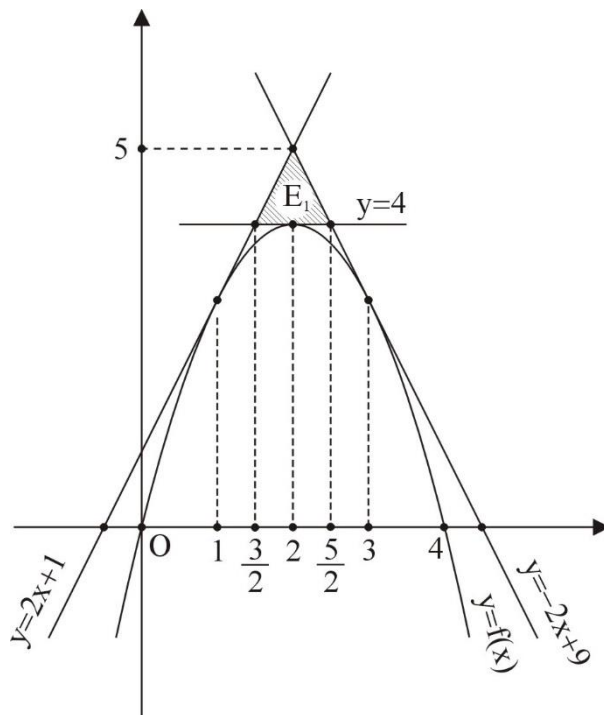
$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{(\text{βαση}) \times (\text{ύψος})}{2} = \\
&= \frac{\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \right) \times (5 - 4)}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

και άρα

$$E_2 = E - E_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Οπότε

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 3$$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή η συνάρτηση $\frac{1}{x^2 + 1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = -\frac{2x}{x^2+1}, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

Προφανώς είναι $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ οπότε η f είναι κοίλη στο διάστημα $[0, +\infty)$

Γ2. Είναι $f(1) = 0$ και $f'(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$

οπότε η εφαπτομένη στο $x_0 = 1$, έχει εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Γ3. Το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$ είναι

$$E = \int_1^2 |f(x)| dx \quad \begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{x^2+1} > 0 \Rightarrow f \nearrow \\ \text{για κάθε } x \in [1, 2] \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq f(1) \xRightarrow{f(1)=0} f(x) \geq 0 \end{array} \Rightarrow E = \int_1^2 f(x) dx \quad (5)$$

Όμως επειδή η f είναι κοίλη, θα είναι μικρότερη από κάθε εφαπτόμενη της, άρα και από την εφαπτομένη της στο $x_0 = 1$

Οπότε για κάθε $x \in [1, 2]$ θα είναι

$$f(x) \leq \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad \begin{array}{l} \text{δεν ισχύει παντού η ισότητα} \end{array} \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx < \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) dx \Rightarrow$$

$$\stackrel{(5)}{\Rightarrow} E < \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} \right]_1^2 \Rightarrow E < \left(\frac{2^2}{4} - \frac{2}{2} \right) - \left(\frac{1^2}{4} - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow E < \frac{1}{4}$$

Γ4. Είναι

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t^2+1} dt \quad \begin{array}{l} y = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{y} \Rightarrow dt = -\frac{1}{y^2} dy \\ \text{για } t=1 \Rightarrow y=1 \\ \text{για } t=\frac{1}{x} \Rightarrow y=x \end{array} - \int_1^x \frac{1}{\frac{1}{y^2}+1} \frac{1}{y^2} dy = \\ &= - \int_1^x \frac{1}{y^2+1} dy \quad \begin{array}{l} f(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2+1} dt \\ \text{για } t=1 \Rightarrow y=1 \\ \text{για } t=\frac{1}{x} \Rightarrow y=x \end{array} - f(x) \end{aligned}$$

Οπότε

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 0}$$

Δ1. Είναι προφανώς $\frac{t^{2x}}{t^2+1} \geq 0$, για κάθε $t \in [0,1]$, χωρίς να είναι παντού μηδέν ,
οπότε

$$\int_1^2 \frac{t^{2x}}{t^2+1} dt > 0 \Rightarrow f(x) > 0 , \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Δ2. Είναι

$$\begin{aligned} f(x) + f(x+1) &= \int_0^1 \frac{t^{2x}}{t^2+1} dt + \int_0^1 \frac{t^{2(x+1)}}{t^2+1} dt = \int_0^1 \frac{t^{2x}}{t^2+1} + \frac{t^{2x+2}}{t^2+1} dt = \\ &= \int_0^1 \frac{t^{2x} + t^{2x+2}}{t^2+1} dt = \int_0^1 \frac{t^{2x} \cancel{(1+t^2)}}{\cancel{t^2}+1} dt = \left[\frac{t^{2x+1}}{2x+1} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1^{2x+1}}{2x+1} - \frac{0^{2x+1}}{2x+1} = \boxed{\frac{1}{2x+1}} \end{aligned}$$

Δ3. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{2x+1}$ (6)

και θέτοντας όπου x το $x+1$ έχουμε

$$f(x+1) + f(x+1+1) = \frac{1}{2(x+1)+1} \Rightarrow f(x+1) + f(x+2) = \frac{1}{2x+3} \quad (7)$$

Από τις (6) και (7) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε

$$f(x+2) - f(x) = \frac{1}{2x+3} - \frac{1}{2x+1} \quad (8)$$

Το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$, $f(x+2)$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$ είναι

$$\begin{aligned} E &= \int_1^2 |f(x+2) - f(x)| dx = \int_1^2 \left| \frac{1}{2x+3} - \frac{1}{2x+1} \right| dx \stackrel{\frac{1}{2x+3} - \frac{1}{2x+1} < 0}{=} \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+3} dx = \int_1^2 \frac{1}{2x+1} dx - \int_1^2 \frac{1}{2x+3} dx = \\ &= \left[\frac{\ln(2x+1)}{2} \right]_1^2 - \left[\frac{\ln(2x+3)}{2} \right]_1^2 = \frac{\ln 5 - \ln 3}{2} - \frac{\ln 7 - \ln 5}{2} \\ &= \boxed{\frac{2\ln 5 - \ln 3 - \ln 7}{2}} \end{aligned}$$

Δ4. $\frac{1}{2} \int_1^2 3f(x) F^2(x) e^{\sqrt{F^3(x)}} dx = 7e^8 + 1$

$y=F(x) \Rightarrow dy=F'(x)dx \Rightarrow dy=f(x)dx$
 $\text{για } x=1 \Rightarrow y=F(1) \Rightarrow y=0$
 $\text{για } x=2 \Rightarrow y=F(2)$

$\int_1^2 f(x) dx = 4 \Rightarrow F(2) - F(1) = 0 \xrightarrow{F(1)=0} F(2)=4$
 $\Rightarrow$

$$u=\sqrt{y^3}\Rightarrow du=\frac{3y^2}{2\sqrt{y^3}}dy\Rightarrow 2\sqrt{y^3}du=3y^2dy\Rightarrow 2udu=3y^2dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^4 3y^2 e^{\sqrt{y^3}} dy =$$

$$\begin{matrix} \gamma u & y=0 \Rightarrow u=0 \\ \gamma u & y=4 \Rightarrow u=8 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^8 2u e^u du = \int_0^8 u e^u du = \int_0^8 u (e^u)' du = \left[u e^u \right]_0^8 - \int_0^8 (u)' e^u du$$

$$= 8e^8 - \left[e^u \right]_0^8 = 8e^8 - e^8 + 1 = 7e^8 + 1$$