

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. 225

Α2. Θεωρία σελ. 219

Α3. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

Α4. Έστω ότι η f δεν παίρνει δύο ετερόσημες τιμές στο $[α,β]$. Αυτό σημαίνει ότι

- είτε για κάθε $x \in [α,β]$ είναι $f(x) \geq 0$
- είτε για κάθε $x \in [α,β]$ είναι $f(x) \leq 0$

Αν ισχύει το πρώτο δηλαδή για κάθε $x \in [α,β]$ είναι $f(x) \geq 0$ τότε επειδή η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[α,β]$ (αφού δεν είναι σταθερή) σύμφωνα με

γνωστή πρόταση θα είναι $\int_a^b f(x) dx > 0$ άτοπο διότι $\int_a^b f(x) dx = 0$

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο αν για κάθε $x \in [α,β]$ είναι $f(x) \leq 0$

ΘΕΜΑ ΒΕπειδή η F είναι αρχική συνάρτηση της f για κάθε $x \in [0,1]$ θα είναι

$$F'(x) = f(x) \stackrel{f(x) < 0}{\Rightarrow} F'(x) < 0 \Rightarrow \text{η } F \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } [0,1]$$

$$\text{Οπότε } 0 < 1 \stackrel{F \searrow}{\Rightarrow} F(0) < F(1) \stackrel{F(0)=0}{\Rightarrow} 0 > F(1)$$

Επειδή η G είναι αρχική συνάρτηση της g για κάθε $x \in [0,1]$ θα είναι

$$G'(x) = g(x) \stackrel{g(x) > 0}{\Rightarrow} G'(x) > 0 \Rightarrow \text{η } G \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [0,1]$$

$$\text{Οπότε } 0 < 1 \stackrel{G \nearrow}{\Rightarrow} G(0) < G(1) \stackrel{G(1)=0}{\Rightarrow} G(0) < 0$$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = F(x) - G(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= F(0) - G(0) \stackrel{F(0)=0}{=} -G(0) \stackrel{G(0) < 0}{\Rightarrow} h(0) > 0 \\ h(1) &= F(1) - G(1) \stackrel{G(1)=0}{=} F(1) \stackrel{F(1) < 0}{\Rightarrow} h(1) < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(0) \cdot h(1) < 0$$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Rightarrow F(\xi) - G(\xi) = 0 \Rightarrow F(\xi) = G(\xi)$$

Ακόμη η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με

$$h'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x) \stackrel{\substack{f(x) < 0 \\ g(x) > 0}}{\Rightarrow} h'(x) < 0 \text{ οπότε η } h \text{ είναι γνησίως φθίνουσα} \\ \text{άρα και 1-1 οπότε το } \xi \text{ που βρήκαμε παραπάνω είναι μοναδικό}$$

ΘΕΜΑ ΓΗ εξίσωση της εφαπτομένης της γραφική παράσταση της f στο $(α, f(α))$ είναι

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Rightarrow y = f'(\alpha)x - \alpha f'(\alpha) + f(\alpha) \stackrel{\alpha f'(\alpha) = 2f(\alpha)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow y = f'(\alpha)x - 2f(\alpha) + f(\alpha) \Rightarrow y = f'(\alpha)x - f(\alpha)$$

Επειδή η f είναι κυρτή θα είναι μεγαλύτερη από κάθε εφαπτόμενη της άρα θα ισχύει

$$f(x) \geq f'(\alpha)x - f(\alpha) \text{ για κάθε } x \in [0, \alpha], \text{ με την ισότητα να ισχύει μόνο για } x = \alpha$$

Επομένως

$$\int_0^\alpha f(x) dx > \int_0^\alpha [f'(\alpha)x - f(\alpha)] dx \quad (1)$$

Όμως

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha [f'(\alpha)x - f(\alpha)] dx &= \int_0^\alpha f'(\alpha)x dx - \int_0^\alpha f(\alpha) dx = f'(\alpha) \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\alpha - f(\alpha)(\alpha - 0) = \\ &= \frac{f'(\alpha)\alpha^2}{2} - \alpha f(\alpha) = \frac{f'(\alpha)\alpha^2 - 2\alpha f(\alpha)}{2} = \frac{\alpha[f'(\alpha)\alpha - 2f(\alpha)]}{2} \stackrel{\alpha f'(\alpha) = 2f(\alpha)}{=} 0 \end{aligned}$$

Οπότε η σχέση (1) γίνεται $\int_0^\alpha f(x) dx > 0$

ΘΕΜΑ Δ

$$\begin{aligned} f(x+1) + f(1-x) &= 3x^2 \stackrel{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } x-1}{\Rightarrow} f(x-1+1) + f(1-(x-1)) = 3(x-1)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x) + f(1-x+1) &= 3(x^2 - 2x + 1) \Rightarrow f(x) + f(2-x) = 3x^2 - 6x + 3 \Rightarrow \\ f(x) &= 3x^2 - 6x + 3 - f(2-x) \quad (1) \end{aligned}$$

Οπότε αν $I = \int_{-1}^3 f(x) dx$ έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^3 f(x) dx \stackrel{(1)}{=} \int_{-1}^3 [3x^2 - 6x + 3 - f(2-x)] dx = \\ &= \int_{-1}^3 (3x^2 - 6x + 3) dx - \int_{-1}^3 f(2-x) dx = \left[x^3 - 3x^2 + 3x \right]_{-1}^3 - \int_{-1}^3 f(2-x) dx = \\ &\stackrel{\substack{\text{θέτουμε } y=2-x \Rightarrow dy=-dx \\ \text{για } x=-1 \Rightarrow y=3 \\ \text{για } x=3 \Rightarrow y=-1}}{=} \cancel{3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3} - \left((-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) \right) + \int_3^{-1} f(y) dy = \\ &= 16 - \int_{-1}^3 f(y) dy = 16 - I \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } I = 16 - I \Rightarrow 2I = 16 \Rightarrow I = 8$$