

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. 186

Α2. Θεωρία σελ. 216

Α3. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

Α4. Η f είναι συνεχής και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$,άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$ Οπότε αν F μία παράγουσα της f με $F'(x) = f(x)$,θα είναι γνησίως μονότονη αφού είτε $f(x) > 0$ είτε $f(x) < 0$ Άρα η F είναι 1-1

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού, έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha) \neq 0 \text{ αφού η } F: 1-1$$

ΘΕΜΑ Β

$$\text{Είναι } \int_1^8 f(x) dx = -10 \Rightarrow \int_1^4 f(x) dx + \int_4^6 f(x) dx + \int_6^8 f(x) dx = -10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 + \int_4^6 f(x) dx - 2 = -10 \Rightarrow \int_4^6 f(x) dx = -15$$

ΘΕΜΑ ΓΒρίσκουμε το σημείο τομής της ευθείας $y = -x + 2$ με την παραβολή $y = x^2$ Έστω $A(x_0, -x_0 + 2)$

$$x_0^2 = -x_0 + 2 \Rightarrow x_0^2 + x_0 - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = -2 \text{ ή } x_0 = 1$$

Από το σχήμα βλέπουμε ότι $x_0 > 0$ άρα $x_0 = 1$. Άρα $A(1, 1)$

Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι το εμβαδόν

του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , την ευθεία $y = -x + 2$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$

Οπότε

$$E(\Omega) = \int_0^1 [x + 2 - f(x)] dx = \int_0^1 [x + 2 - x^2] dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$$

ΘΕΜΑ Δα) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $f'(x) = \sin x > 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και 1-1 στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και συνεπώς αντιστρέφεταιβ) Είναι $f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$

Έτσι

$$\text{θέτουμε } u = f^{-1}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = f(u) \Rightarrow x = \eta \mu u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = \sin u du$$

$$\text{για } x=0 \Rightarrow u = f^{-1}(0) = 0$$

$$\text{για } x=1 \Rightarrow u = f^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \sin(f^{-1}(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cdot \sin u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sigma \nu 2u}{2} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \nu 2u}{2} du = \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \nu 2u}{2} du =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left[\frac{\eta \mu 2u}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{\eta \mu \pi}{2} - \frac{\eta \mu 0}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$$