

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σελ. 216

A2. Θεωρία σελ. 185

A3. α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Σ

A4. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη στο Δ και F μία παράγουσα της f στο Δ

Τότε κάθε συνάρτηση G της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \neq 0$, $x \in \Delta$

Είναι μία παράγουσα της f με $F(x) \neq G(x)$, καθώς :

$$G'(x) = F'(x) + (c)' = F'(x) = f(x)$$

Άρα δεν υπάρχει συνάρτηση με μία μόνο αρχική

ΘΕΜΑ Β

Είναι $f(x) \leq 0$ στο $[-1, 1]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, 3]$

$$\text{Άρα } \int_{-1}^3 |f(x)| dx = 19 \Rightarrow \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_1^3 f(x) dx = 19 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 19 \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \int_1^3 f(x) dx = E(\Omega)$$

$$\text{Από υπόθεση, } \int_{-1}^3 f(x) dx = 7 \Rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int_{-1}^1 f(x) dx = E(\Omega) - 7$$

$$\text{Άρα } (1) \Rightarrow 2E(\Omega) - 7 = 19 \Rightarrow 2E(\Omega) = 26 \Rightarrow E(\Omega) = 13$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}+2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx \quad \begin{matrix} \sqrt{x}=u \Rightarrow x=u^2 \\ \Rightarrow dx=2u du \\ \text{για } x=0 \quad u=0 \\ \text{για } x=1 \quad u=1 \end{matrix} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2u du}{u+1} = \int_0^1 \frac{u}{u+1} du = \int_0^1 \frac{u+1-1}{u+1} du =$$

$$= \int_0^1 \left[1 - \frac{1}{u+1} \right] du = \left[u - \ln(|u+1|) \right]_0^1 = 1 - \ln 2$$

ΘΕΜΑ Δ

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι :

$$\int_0^2 x f(x) dx < 2F(2) - 2 \Leftrightarrow \int_0^2 x F'(x) dx < 2F(2) - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[xF(x) \right]_0^2 - \int_0^2 F(x) dx < 2F(2) - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2F(2) - \int_0^2 F(x) dx < 2F(2) - 2 \Leftrightarrow \int_0^2 F(x) dx > 2,$$

που ισχύει διότι

$f(x) = F'(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$, άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$

$$\text{Οπότε με } x > 0 \Rightarrow F(x) > F(0) = 1 \Rightarrow \int_0^2 F(x) dx > \int_0^2 1 dx = 2$$