Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

33.Δ1

Είναι

$$E=\int_0^{\pi}\left|f(x)\right|dx=\int_0^{\pi}\left|\sqrt{\eta\mu x-\eta\mu^3 x}\right|dx\overset{\sqrt{\eta\mu x-\eta\mu^3 x}>0}{=}\int_0^{\pi}\sqrt{\eta\mu x-\eta\mu^3 x}\,dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{\eta\mu x\left(1-\eta\mu^2 x\right)}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{\eta\mu x}\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{\eta\mu x}\left|\sigma\upsilon\nu x\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\eta\mu x}\left|\sigma\upsilon\nu x\right|dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\eta\mu x}\left|\sigma\upsilon\nu x\right|dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\eta\mu x}\,\sigma\upsilon\nu x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\eta\mu x}\left(-\sigma\upsilon\nu x\right)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\eta\mu x}\,\sigma\upsilon\nu x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\eta\mu x}\,\sigma\upsilon\nu x\,dx\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=\eta\mu x\Rightarrow dy=\sigma\upsilon\nu x dx\\ \text{για } x=0\Rightarrow y=0\\ \text{για } x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow y=1\\ \text{για } x=\pi\Rightarrow y=0}}{=}$$

$$=\int_0^1\sqrt{y}\,dy-\int_1^0\sqrt{y}\,dx=\int_0^1\sqrt{y}\,dy+\int_0^1\sqrt{y}\,dx=2\int_0^1\sqrt{y}\,dy=2\int_0^1 y^{\frac{1}{2}}dy=$$

$$=2\left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=2\left(\frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{0^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)=2\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

33.Δ2

Έστω $I=\int_0^{2\pi}\eta\mu\left(\eta\mu x+x\right)dx$. Τότε

$$I=\int_0^{2\pi}\eta\mu\left(\eta\mu x+x\right)dx\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=2\pi-x\Rightarrow x=2\pi-y\Rightarrow dx=-dy\\ \text{για } x=0\Rightarrow y=2\pi\\ \text{για } x=2\pi\Rightarrow y=0}}{=}-\int_{2\pi}^{0}\eta\mu\left(\eta\mu\left(2\pi-y\right)+2\pi-y\right)dy=$$

$$\overset{\eta\mu(2\pi-y)=-\eta\mu y}{=}\int_0^{2\pi}\eta\mu\left(-\eta\mu y+2\pi-y\right)dy=\int_0^{2\pi}\eta\mu\left[2\pi-\left(\eta\mu y+y\right)\right]dy=$$

$$\overset{\eta\mu\left[2\pi-(\eta\mu y+y)\right]=-\eta\mu(\eta\mu y+y)}{=}\int_0^{2\pi}-\eta\mu\left(\eta\mu y+y\right)dy=-\int_0^{2\pi}\eta\mu\left(\eta\mu y+y\right)dy=-I$$

Δηλαδή $I=-I\Rightarrow 2I=0\Rightarrow I=0$

33.Δ3

Έστω $I=\int_3^4\frac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}dx$

$$\int_3^4\frac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}dx=\int_3^4\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right)}dx=$$

$$=\int_3^4 \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}^2-\sqrt{x+1}^2}dx=\int_3^4 \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}{2x+\cancel{1}-x-\cancel{1}}dx=$$

$$=\int_3^4 \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}{x}dx=\int_3^4 \frac{\sqrt{2x+1}}{x}dx+\int_3^4 \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$$

Οπότε αν $I_1=\int_3^4 \frac{\sqrt{2x+1}}{x}dx$ και $I_2=\int_3^4 \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$ θα είναι $I=I_1+I_2$ (1)

Ακόμη

$$I_1=\int_3^4 \frac{\sqrt{2x+1}}{x}dx \underset{\substack{\text{για } x=3\Rightarrow y=\sqrt{7}\\ \text{για } x=4\Rightarrow y=\sqrt{9}=3}}{\overset{\text{θέτουμε } \boxed{y=\sqrt{2x+1}}\Rightarrow 2x+1=y^2\Rightarrow \boxed{x=\frac{y^2-1}{2}}\Rightarrow dx=\frac{2y}{2}dy\Rightarrow \boxed{dx=ydy}}{=}} \int_{\sqrt{7}}^3 \frac{y}{\frac{y^2-1}{2}}ydy=$$

$$=\int_{\sqrt{7}}^3 \frac{2y^2}{y^2-1}dy=\int_{\sqrt{7}}^3 \frac{2y^2-2+2}{y^2-1}dy=\int_{\sqrt{7}}^3 \frac{2\cancel{\left(y^2-1\right)}}{\cancel{y^2-1}}dy+\int_{\sqrt{7}}^3 \frac{2}{y^2-1}dy=$$

$$=2\left(3-\sqrt{7}\right)+\int_{\sqrt{7}}^3 \frac{2}{y^2-1}dy$$

Είναι $\frac{2}{y^2-1}=\frac{2}{(y-1)(y+1)}$

Οπότε θα πρέπει να βρούμε τα Α και Β ώστε $\frac{2}{(y-1)(y+1)}=\frac{A}{y-1}+\frac{B}{y+1}$

Έχουμε

$$\frac{2}{(y-1)(y+1)}=\frac{A}{y-1}+\frac{B}{y+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{(y-1)(y+1)}\frac{2}{\cancel{(y-1)(y+1)}}=\cancel{(y-1)}(y+1)\frac{A}{\cancel{y-1}}+(y-1)\cancel{(y+1)}\frac{B}{\cancel{y+1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2=A(y+1)+B(y-1)\Rightarrow 2=Ay+A+By-B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2=(A+B)y+A-B\Rightarrow \begin{cases}A+B=0\\ A-B=2\end{cases} \overset{\text{λύνουμε το σύστημα}}{\Rightarrow} \begin{cases}A=1\\ B=-1\end{cases}$$

Οπότε $\frac{2}{(y-1)(y+1)}=\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}$

Άρα

$$I_1=2\left(3-\sqrt{7}\right)+\int_{\sqrt{7}}^3 \frac{2}{y^2-1}dy=2\left(3-\sqrt{7}\right)+\int_{\sqrt{7}}^3 \frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}dy=$$

$$=2\left(3-\sqrt{7}\right)+\left[\ln|y-1|-\ln|y+1|\right]_{\sqrt{7}}^3=$$

$$= 2\left(3-\sqrt{7}\right)+\left[\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right]_{\sqrt{7}}^{3} = 2\left(3-\sqrt{7}\right)+\ln\left|\frac{3-1}{3+1}\right|-\ln\left|\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}\right| =$$

$$= 2\left(3-\sqrt{7}\right)+\ln\frac{1}{2}-\ln\left|\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}\right| = 6-2\sqrt{7}-\ln 2-\ln\left|\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}\right|$$

Άρα $I_1 = 6-2\sqrt{7}-\ln 2-\ln\left|\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}\right|$ (2)

$$I_2 = \int_3^4 \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx \overset{\substack{\text{θέτουμε } \boxed{y=\sqrt{x+1}} \Rightarrow x+1=y^2 \Rightarrow \boxed{x=y^2-1} \Rightarrow \boxed{dx=2ydy} \\ \text{για } x=3 \Rightarrow y=\sqrt{4}=2 \\ \text{για } x=4 \Rightarrow y=\sqrt{5}}}{=} \int_2^{\sqrt{5}} \frac{y}{y^2-1}2ydy = \int_2^{\sqrt{5}} \frac{2y^2}{y^2-1}dy$$

$$= \int_2^{\sqrt{5}} \frac{2y^2-2+2}{y^2-1}dy = \int_2^{\sqrt{5}} \frac{2\cancel{\left(y^2-1\right)}}{\cancel{y^2-1}}dy + \int_2^{\sqrt{5}} \frac{2}{y^2-1}dy = 2\left(\sqrt{5}-2\right)+\int_2^{\sqrt{5}} \frac{2}{y^2-1}dy$$

Όμοια με το I_1 είναι

$$I_2 = 2\left(\sqrt{5}-2\right)+\int_2^{\sqrt{5}} \frac{2}{y^2-1}dx = 2\left(\sqrt{5}-2\right)+\int_2^{\sqrt{5}} \frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}dx =$$

$$= 2\left(\sqrt{5}-2\right)+\left[\ln|y-1|-\ln|y+1|\right]_2^{\sqrt{5}} =$$

$$= 2\left(\sqrt{5}-2\right)+\left[\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right]_2^{\sqrt{5}} = 2\left(\sqrt{5}-2\right)+\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|-\ln\left|\frac{2-1}{2+1}\right| =$$

$$= 2\left(\sqrt{5}-2\right)+\ln\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}-\ln\frac{1}{3} = 2\sqrt{5}-4+\ln 3+\ln\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$$

Άρα $I_2 = 2\sqrt{5}-4+\ln 3+\ln\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ (3)

Τελικά

$$(1) \overset{(2),(3)}{\Rightarrow} I = 6-2\sqrt{7}-\ln 2-\ln\left|\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}\right|+2\sqrt{5}-4+\ln 3+\ln\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 2-2\sqrt{7}+2\sqrt{5}-\ln 2+\ln 3-\ln\left|\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}\right|+\ln\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}$$

33.Δ4

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\left(1+x^4\right)}dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{4x^3}{4x^4\left(1+x^4\right)}dx \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=x^4 \Rightarrow dy=4x^3dx \\ \text{για } x=1 \Rightarrow y=1 \\ \text{για } x=\sqrt{2} \Rightarrow y=\sqrt{2}^4=4}}{=} \int_1^4 \frac{1}{4y(1+y)}dy$$

Τώρα θα βρούμε τα A και B ώστε $\frac{1}{4y\left(y+1\right)} = \frac{A}{4y}+\frac{B}{y+1}$

Έχουμε

$$\frac{1}{4y(y+1)}=\frac{A}{4y}+\frac{B}{y+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{4y(x+1)}\frac{1}{\cancel{4y(y+1)}}=\cancel{4y}(y+1)\frac{A}{\cancel{4y}}+4y\cancel{(y+1)}\frac{B}{\cancel{y+1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=Ay+A+4By\Rightarrow 1=(A+4B)y+A\Rightarrow\begin{cases}A+4B=0\\A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

Οπότε $\frac{1}{4y(y+1)}=\frac{1}{4y}-\frac{\frac{1}{4}}{y+1}$

Άρα

$$\int_1^4\frac{1}{4y(1+y)}dy=\int_1^4\left(\frac{1}{4y}-\frac{\frac{1}{4}}{y+1}\right)dy=\frac{1}{4}\int_1^4\frac{1}{y}dy-\frac{1}{4}\int_1^4\frac{1}{y+1}dy=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\ln|y|\right]_1^4-\frac{1}{4}\left[\ln|y+1|\right]_1^4=\frac{1}{4}(\ln 4-\cancel{\ln 1})-\frac{1}{4}(\ln 5-\ln 2)=\frac{\ln 4-\ln 5+\ln 2}{4}$$

33.Δ5

Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο της $(1,f(1))$ έχει εξίσωση

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

Επειδή η f είναι κυρτή θα είναι μεγαλύτερη από την εφαπτόμενη της , δηλαδή

$f(x)\geq f'(1)(x-1)+f(1)$ (με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$)

οπότε

$$\int_{-2}^0 f(x)dx>\int_{-2}^0\left[f'(1)(x-1)+f(1)\right]dx \quad (1)$$

Όμως

$$\int_{-2}^0\left[f'(1)(x-1)+f(1)\right]dx=f'(1)\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{-2}^0+f(1)(0+2)=$$

$$=f'(1)\left[0-\frac{4}{2}+(-2)\right]+2f(1)=-4f'(1)+2f(1)$$

δηλαδή

$$\int_{-2}^0\left[f'(1)(x-1)+f(1)\right]dx=-4f'(1)+2f(1) \quad (2)$$

Οπότε $(1),(2)\Rightarrow\int_{-2}^0 f(x)dx>-4f'(1)+2f(1)\Rightarrow\int_{-2}^0 f(x)dx>2\left[-2f'(1)+f(1)\right]\Rightarrow$

$$\overset{f(1)>2f'(1)\Rightarrow f(1)-2f'(1)>0}{\Rightarrow} \int_{-2}^{0} f(x)dx>0$$

33.Δ6

α) Έστω ότι η g δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Τότε επειδή $g(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, σύμφωνα με γνωστή πρόταση θα ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx>0$ άτοπο διότι $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx=0$

β) $\int_0^1 f^2(x)dx+\frac{1}{3}=\int_0^1 2xf(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f^2(x)dx-\int_0^1 2xf(x)dx=-\frac{1}{3} \overset{\text{προσθέτουμε και στα δύο μέλη το } \int_0^1 x^2dx}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \int_0^1 f^2(x)dx-\int_0^1 2xf(x)dx+\int_0^1 x^2dx=-\frac{1}{3}+\int_0^1 x^2dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1\left[f^2(x)-2xf(x)+x^2\right]dx=-\frac{1}{3}+\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \Rightarrow \int_0^1\left[f(x)-x\right]^2dx=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1\left[f(x)-x\right]^2dx=0$$

Αν τώρα θέσουμε $g(x)=\left[f(x)-x\right]^2$ παρατηρούμε ότι $g(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[0,1]$ και $\int_0^1 g(x)dx=0$. Άρα με βάση το προηγούμενο ερώτημα για κάθε $x\in[0,1]$ είναι

$$g(x)=0\Rightarrow\left[f(x)-x\right]^2=0\Rightarrow f(x)-x=0\Rightarrow f(x)=x$$

33.Δ7

$f(\alpha+x)+f(\alpha-x)=2\beta \overset{\text{θέτουμε όπου x το x}-\alpha}{\Rightarrow} f(\alpha+x-\alpha)+f(\alpha-(x-\alpha))=2\beta\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)+f(\alpha-x+\alpha)=2\beta\Rightarrow f(x)+f(2\alpha-x)=2\beta\Rightarrow f(x)=2\beta-f(2\alpha-x)$ (1) για κάθε $x\in R$

Οπότε αν $I=\int_0^{2\alpha} f(t)dt$ έχουμε

$$I=\int_0^{2\alpha} f(t)dt\overset{(1)}{=}\int_0^{2\alpha} 2\beta-f(2\alpha-t)dt=\int_0^{2\alpha}2\beta dt-\int_0^{2\alpha}f(2\alpha-t)dt=$$

$$=2\beta(2\alpha-0)-\int_0^{2\alpha}f(2\alpha-t)dt \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=2\alpha-t\Rightarrow dy=-dt\\ \text{για } t=0\Rightarrow y=2\alpha\\ \text{για } t=2\alpha\Rightarrow y=0}}{=} 4\alpha\beta+\int_{2\alpha}^{0}f(y)dy=4\alpha\beta-\int_0^{2\alpha}f(y)dy=$$

$$=4\alpha\beta-I$$

Άρα $I=4\alpha\beta-I\Rightarrow 2I=4\alpha\beta\Rightarrow I=2\alpha\beta$

33.Δ8

Έστω $I=\int_{-2}^{2}\frac{f(x^2)}{1+e^x}dx$ (1) . Τότε

$$I=\int_{-2}^{2}\frac{f(x^2)}{1+e^x}dx \overset{\substack{\text{θέτουμε } y=-x\Rightarrow x=-y\\ \Rightarrow dx=-dy\\ \text{για } x=-2\Rightarrow y=2\\ \text{για } x=2\Rightarrow y=-2}}{=} -\int_{2}^{-2}\frac{f(y^2)}{1+e^{-y}}dy=\int_{-2}^{2}\frac{f(y^2)}{1+\frac{1}{e^y}}dy=\int_{-2}^{2}\frac{f(y^2)}{\frac{e^y+1}{e^y}}dy=$$

$$=\int_{-2}^{2}\frac{e^{y}f\left(y^{2}\right)}{e^{y}+1}dy$$

Άρα $I=\int_{-2}^{2}\frac{e^{x}f\left(x^{2}\right)}{1+e^{x}}dx$ (2)

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε

$$2I=\int_{-2}^{2}\frac{e^{x}f\left(x^{2}\right)}{1+e^{x}}dx+\int_{-2}^{2}\frac{f\left(x^{2}\right)}{1+e^{x}}dx\Rightarrow 2I=\int_{-2}^{2}\frac{e^{x}f\left(x^{2}\right)+f\left(x^{2}\right)}{1+e^{x}}dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2I=\int_{-2}^{2}\frac{f\left(x^{2}\right)\cancel{\left(e^{x}+1\right)}}{\cancel{1+e^{x}}}dx\Rightarrow 2I=\int_{-2}^{2}f\left(x^{2}\right)dx\overset{\int_{-2}^{2}f\left(x^{2}\right)dx=10}{\Rightarrow}2I=10\Rightarrow I=5$$