

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

33.B1

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[α, β]$, με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [α, β]$ συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[α, β]$ όποτε

$$x \in [α, β] \Rightarrow x \geq α \overset{f'}{\Rightarrow} f(x) \geq f(α) \text{ (με την ισότητα να ισχύει για κάθε } x \in [α, β])$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx > \int_a^b f(α) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > f(α)(β - α)$$

33.B2

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x) dx + \int_{\delta}^b f(x) dx = \int_a^{\delta} f(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^{\gamma} f(x) dx = - \int_{\delta}^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^{\gamma} f(x) dx = \int_{\beta}^{\delta} f(x) dx$$

33.B3

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{e^x}{x}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[2, 4]$ με $f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} > 0$, για κάθε $x \in (2, 4)$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, 4]$

Έτσι έχουμε

$$2 \leq x \leq 4 \overset{f'}{\Rightarrow} f(2) \leq f(x) \leq f(4) \Rightarrow \frac{e^2}{2} \leq f(x) \leq \frac{e^4}{4}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $x \in [2, 4]$ και άρα

$$\frac{e^2}{2} \leq f(x) \leq \frac{e^4}{4} \Rightarrow \int_2^4 \frac{e^2}{2} dx \leq \int_2^4 f(x) dx \leq \int_2^4 \frac{e^4}{4} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^2}{2}(4-2) \leq \int_2^4 f(x) dx \leq \frac{e^4}{4}(4-2) \Rightarrow \frac{2e^2}{2} \leq \int_2^4 f(x) dx \leq \frac{2e^4}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^2 \leq \int_2^4 f(x) dx \leq \frac{e^4}{2}$$

33.B4

α) Η f είναι συνεχής στο $[0, 1)$ ως λογαριθμική

Η f είναι συνεχής στο $(1, e]$ ως πολυωνυμική

Τέλος και στο $x_0 = 1$ η f είναι επίσης συνεχής διότι

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 2) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x) = \ln 1 = 0$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0$$

Τελικά η f είναι συνεχής στο $[0, e]$

$$\begin{aligned} \beta) \quad \int_0^e f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^e f(x) dx = \int_0^1 (2x - 2) dx + \int_1^e \ln x dx = \\ &= \left[x^2 - 2x \right]_0^1 + \int_1^e (x)' \ln x dx = 1^2 - 2 \cdot 1 + [x \ln x]_1^e - \int_1^e x (\ln x)' dx = \\ &= -1 + e \ln e - 1 \cdot \ln 1 - \int_1^e \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} dx = -1 + e - 1 \cdot (e - 1) = -1 + e - e + 1 = 0 \end{aligned}$$

33.B5

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

Αν $\alpha < 2$ τότε

το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης

f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \alpha$, θα είναι $E = \int_{\alpha}^2 |f(x)| dx$

Οπότε:

$$E = 18 \Rightarrow \int_{\alpha}^2 |f(x)| dx = 18 \Rightarrow \int_{\alpha}^2 |x - 2| dx = 18 \xrightarrow{\gamma\text{ια } x \leq 2 \Rightarrow x - 2 \leq 0} \int_{\alpha}^2 (2 - x) dx = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_{\alpha}^2 = 18 \Rightarrow 2 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - \left(2\alpha - \frac{\alpha^2}{2} \right) = 18 \Rightarrow 2 + \frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha = 18 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha - 32 = 0 &\quad \Delta = 16 + 128 = 144 \\ &\quad \alpha_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 12}{2} \quad \nearrow \alpha_1 = \frac{4 + 12}{2} = 8 \text{ απορρίπτεται διότι } \alpha < 2 \\ &\quad \searrow \alpha_2 = \frac{4 - 12}{2} = -4 \text{ απορρίπτεται διότι } \alpha > 0 \end{aligned}$$

Αν $\alpha > 2$ τότε

το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης

f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \alpha$, θα είναι $E = \int_2^{\alpha} |f(x)| dx$

Οπότε

$$E = 18 \Rightarrow \int_2^{\alpha} |f(x)| dx = 18 \Rightarrow \int_2^{\alpha} |x - 2| dx = 18 \xrightarrow{\gamma\text{ια } x \geq 2 \Rightarrow x - 2 \geq 0} \int_2^{\alpha} (x - 2) dx = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^{\alpha} = 18 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{2} - 2 \cdot \alpha - \left(\frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 \right) = 18 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha + 2 = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 36 \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha - 32 \Rightarrow$$

$$\Delta = 16 + 128 = 144$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 12}{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{4+12}{2} = 8 \text{ δεκτή}$$

$$\alpha_2 = \frac{4-12}{2} = -4 \text{ απορρίπτεται διότι } \alpha > 0$$

33.B6

$$\begin{aligned} \alpha) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx &= [x \eta \mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)' \eta \mu x dx = \frac{\pi}{2} \eta \mu \frac{\pi}{2} - 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x dx = \\ &= \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - (0 + 1) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\beta) \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3 \sin(x^2) dx \stackrel{x^2=y}{2x dx=dy} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xy \sin y \frac{dy}{2x} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sin y dy \stackrel{a)}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

33.B7

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^2 e^x dx = \left[x^2 e^x \right]_0^1 - \int_0^1 (x^2)' e^x dx = \\ &= e - 0 - 2 \int_0^1 x e^x dx = e - 2 \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 (x)' e^x dx = e - 2 \left[e - \int_0^1 e^x dx \right] = \\ &= e - 2e + 2(e - 1) = e - 2 \end{aligned}$$

33.B8

Βρίσκουμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των

$$f(x) = x^3 + 5x, g(x) = 2x^2 - 4x :$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 + 5x = 2x^2 - 4x \Rightarrow x(x^2 - 2x + 9) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή}$$

$$x^2 - 2x + 9 = 0, \text{ αδύνατο αφού } \Delta = (-2)^2 - 4(1)(9) = -32 < 0.$$

Επομένως αναζητούμε το

$$\begin{aligned} E &= \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^2 |x(x^2 - 2x + 9)| dx \stackrel{x^2-2x+9>0}{x>0} = \int_0^2 x(x^2 - 2x + 9) dx = \\ &= \int_0^2 (x^3 - 2x^2 + 9x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{2(2)^3}{3} + \frac{9(2)^2}{2} - 0 = \frac{50}{3} \end{aligned}$$

33.B9

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x > 0$. Πράγματι,

$$F'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} + 3 \right)' = \frac{(\ln x)' x - (x)' \ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = f(x)$$

β) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το

$$\begin{aligned} \int_1^e |f(x)| dx &= \int_1^e \left| \frac{1 - \ln x}{x^2} \right| dx \stackrel{\substack{x < e \\ \ln x < \ln e = 1 \\ 1 - \ln x > 0}}{=} \int_1^e \frac{1 - \ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} (1 - \ln x) \right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x} (1 - \ln x)' dx = \\ &= 1 - \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = 1 - \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e = 1 - \left(-\frac{1}{e} + 1 \right) = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

33.B10

$$\int_0^2 f^2(x) dx = \int_0^1 f^2(x) dx + \int_1^2 f^2(x) dx \Rightarrow 2 = \lambda + \lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\begin{array}{l} \Delta=1+8=9 \\ \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \\ \lambda_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \text{δεκτή} \\ \lambda_2 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{απορρίπτεται διότι } \lambda = \int_0^1 f^2(x) dx \geq 0 \end{array}$$