

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

33.A2 1)

α) Ψ

β) Έστω $f(x) = 3x^2$ και $F(x) = x^3 + 1$ μια αρχική της.

Παρατηρούμε ότι η f είναι άρτια διότι $f(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = f(x)$

αλλά η F δεν είναι περιττή διότι $\pi\chi F(-1) \neq -F(1)$

33.A2 2)

α) Α

β) Έχουμε ισοδύναμα

$$F(\alpha) + G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) \Leftrightarrow G(\beta) - G(\alpha) = F(\beta) - F(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

που προφανώς ισχύει

33.A2 3)

α) Ψ

β) Έστω $f(x) = \sqrt{x}$ $x \in [0, +\infty)$. Η f είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x) = x^2$. Όμως

$$\int_1^4 |f(x) - x| dx = \int_1^4 |\sqrt{x} - x| dx \stackrel{\sqrt{x}-x < 0}{=} \int_1^4 (x - \sqrt{x}) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \right]_1^4 =$$

$$= \frac{2\sqrt{1^3}}{3} - \frac{1^2}{2} - \left(\frac{2\sqrt{4^3}}{3} - \frac{4^2}{2} \right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{16}{3} + 8 = \frac{4-3-32+48}{6} = \frac{17}{6}$$

$$\int_1^4 |f^{-1}(x) - x| dx = \int_1^4 |x^2 - x| dx \stackrel{x^2-x > 0}{=} \int_1^4 (x^2 - x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^4 =$$

$$= \frac{4^3}{3} - \frac{4^2}{2} - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} \right) = \frac{64}{3} - 8 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{128-48-2+3}{6} = \frac{27}{2}$$

Προφανώς είναι $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - x| dx \neq \int_{\alpha}^{\beta} |f^{-1}(x) - x| dx$

33.A2 4)

α) Ψ

β) Έστω $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$. Παρατηρούμε ότι

$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{2\pi} = -\sigma\upsilon\nu 2\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 0$, όμως η f δεν είναι η μηδενική συνάρτηση στο $[0, 2\pi]$.

33.A2 5)

α) Ψ

β) Έστω $f(x) = \eta\mu x$. Παρατηρούμε ότι

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{2\pi} = -\sigma\upsilon\nu 2\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 0 \text{ και}$$

$$\int_0^{4\pi} f(x) dx = \int_0^{4\pi} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{4\pi} = -\sigma\upsilon\nu 4\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 0. \text{ Άρα είναι}$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{4\pi} f(x) dx, \text{ όμως προφανώς } 2\pi \neq 4\pi.$$

33.A2 6)

α) Ψ

$$\begin{aligned} \beta) \text{ Έχουμε } \int_a^\beta |f^{-1}(x) - x| dx & \stackrel{\substack{f^{-1}(x)=y \\ x=f(y) \\ dx=f'(y)dy}}{=} \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(\beta)} |y - f(y)| f'(y) dy \stackrel{\substack{f(a)=a \\ f(\beta)=\beta}}{=} \\ & = \int_a^\beta |f(x) - x| f'(x) dx \neq \int_a^\beta |f(x) - x| dx \end{aligned}$$

33.A2 7)

α) Α

$$\begin{aligned} \beta) \text{ Έχουμε } 2 \int_0^a f(x) dx & = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \stackrel{\substack{-x=y \\ dx=-dy}}{=} - \int_0^{-a} f(-y) dy + \int_0^a f(x) dx = \\ & = \int_{-a}^0 f(-y) dy + \int_0^a f(x) dx \stackrel{\substack{f:\text{άρτια} \\ f(-y)=f(y)}}{=} \int_{-a}^0 f(y) dy + \int_0^a f(x) dx = \int_{-a}^a f(x) dx \end{aligned}$$

33.A2 8)

α) Α

$$\beta) \text{ Έχουμε } \int_1^e \eta \mu(\ln x) dx \stackrel{\substack{\ln x=y \\ x=e^y \Rightarrow dx=e^y dy \\ \ln e=1 \\ \ln 1=0}}{=} \int_0^1 \eta \mu(y) e^y dy = \int_0^1 \eta \mu(x) e^x dx$$

33.A2 9)

α) Ψ

β) Έστω $f(x) = \eta \mu x, x \in [0, 2\pi]$. Το εμβαδόν που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τις ευθείες και τον άξονα $x'x$ είναι μη μηδενικό αφού η f δεν είναι παντού 0 στο $[0, 2\pi]$. Όμως,

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) dx \right| = \left| \int_0^{2\pi} \eta \mu x dx \right| = \left| [-\sigma \nu x]_0^{2\pi} \right| = |-\sigma \nu 2\pi + \sigma \nu 0| = 0, \text{ άρα το}$$

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) dx \right| \text{ δεν γίνεται να εκφράζει εμβαδόν.}$$

33.A2 10)

α) Ψ

β) Έστω ότι η f έχει στο διάστημα $[0, 5]$ ελάχιστο το 3. Τότε θα ισχύει:

$$\begin{aligned} f(x) \geq 3 & \Rightarrow \int_0^5 f(x) dx \geq \int_0^5 3 dx = 3(5-0) = 15 \text{ το οποίο είναι άτοπο, αφού} \\ \int_0^5 f(x) dx & = 10 < 15 \end{aligned}$$

33.A2 11)

α) Ψ

β) Έστω $f(x) = x^2, x \in [0, 1]$ και $g(x) = \frac{1}{3}, x \in [0, 1]$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx & = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - 0 = \frac{1}{3} \text{ και} \\ \int_0^1 g(x) dx & = \int_0^1 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3} = \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

αλλά προφανώς δεν ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$

33.A2 12)

α) Ψ

β) Έστω $f(x) = \eta \mu x, x \in [0, \frac{5\pi}{4}]$. Είναι

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{5\pi}{4}} \eta \mu x dx = [-\sigma \upsilon \nu x]_0^{\frac{5\pi}{4}} = -\sigma \upsilon \nu \frac{5\pi}{4} + \sigma \upsilon \nu 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 > 0. \text{ Όμως δεν}$$

$$\text{ισχύει } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, \frac{5\pi}{4}], \text{ αφού πχ. } \eta \mu \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

33.A2 13)

α) Σ

β) Η f είναι συνεχής στο $x \in [\alpha, \beta]$ και δε μηδενίζεται σε αυτό, άρα διατηρεί

σταθερό πρόσημο. Έστω $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Τότε θα είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$.

Όμοια αν $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, θα ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < 0$. Άρα σε κάθε

περίπτωση θα είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \neq 0$

33.A2 14)

α) Α

β) Έστω F μία παράγουσα της f με $f(x) = F'(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \Rightarrow F(\beta) - F(\alpha) = 0$$

Η συνάρτηση F :

Είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

Είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)

$$F(\alpha) = F(\beta)$$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = f(\xi) = 0$$