

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

32.9 1)

Αρχικά θα βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g

$$\text{Έχουμε } f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 5 = x + 1 \Leftrightarrow x = 6$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_1^6 |f(x) - g(x)| dx = \int_1^6 |2x - 5 - x - 1| dx = \int_1^6 |x - 6| dx \stackrel{x \leq 6 \Rightarrow x - 6 \leq 0}{=} \int_1^6 (-x + 6) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 6x \right]_1^6 = \left(-\frac{6^2}{2} + 6 \cdot 6 \right) - \left(-\frac{1^2}{2} + 6 \cdot 1 \right) = 18 + \frac{1}{2} - 6 = \boxed{\frac{25}{2}}$$

32.9 2)

Αρχικά θα βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g

$$\text{Έχουμε } f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_{-1}^0 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^0 |x^2 - x| dx$$

τα πρόσημα του $x^2 - x = x(x - 1)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$	$+$	$\circ$	$\circ$	$+$

Επομένως

$$E = \int_{-1}^0 |x^2 - x| dx = \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

32.9 3)

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $(-2, +\infty)$ και η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$

Αρχικά θα βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g , για $x \in (0, +\infty)$

$$\text{Έχουμε } f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(x + 2) = 2 \ln x \Leftrightarrow \ln(x + 2) = \ln x^2 \Leftrightarrow x^2 = x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 9, x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{1-3}{2} \Rightarrow x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{1+3}{2} \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \text{ (απορρίπτεται διότι } x > 0) \text{ ή } x = 2$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_1^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_1^2 |\ln(x+2) - 2\ln x| dx =$$

$$\ln(x+2) - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln(x+2) - \ln x^2 > 0 \Leftrightarrow x+2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) < 0 \Leftrightarrow \overset{x>0}{x-2 < 0} \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

$$= \int_1^2 [\ln(x+2) - 2\ln x] dx =$$

$$= \int_1^2 \ln(x+2) dx - \int_1^2 2\ln x dx = \int_1^2 (x)' \ln(x+2) dx - \int_1^2 (x)' 2\ln x dx \overset{\text{παραγοντική ολοκλήρωση}}{=} =$$

$$= [x \ln(x+2)]_1^2 - \int_1^2 x [\ln(x+2)]' dx - [2x \ln x]_1^2 + \int_1^2 x (2\ln x)' dx =$$

$$= 2\ln 4 - \ln 3 - \int_1^2 x \frac{1}{x+2} dx - 4\ln 2 + \int_1^2 \cancel{x} \frac{2}{\cancel{x}} dx =$$

$$= \cancel{2\ln 4} - \ln 3 - \int_1^2 \frac{x+2-2}{x+2} dx - \cancel{4\ln 2} + 2(2-1) =$$

$$= -\ln 3 - \int_1^2 \frac{\cancel{x+2}}{\cancel{x+2}} dx + \int_1^2 \frac{2}{x+2} dx + 2 = 2 - \ln 3 - 1(2-1) + [2\ln|x+2|]_1^2 =$$

$$= 2 - \ln 3 - 1 + 2\ln|2+2| - 2\ln|1+2| = 1 - \ln 3 + 2\ln 4 - 2\ln 3 = 2\ln 4 - 3\ln 3 + 1 =$$

$$= 2\ln 2^2 - 3\ln 3 + 1 = 4\ln 2 - 3\ln 3 + 1$$