

32.7 1)

Αρχικά θα βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g

Έχουμε

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = 1$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^1 |x^3 - x| dx$$

τα πρόσημα του $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x^3 - x$		-	○	+	○	-	○	+	

Επομένως

$$E = \int_{-1}^1 |x^3 - x| dx = \int_{-1}^0 |x^3 - x| dx + \int_0^1 |x^3 - x| dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (-x^3 + x) dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 0 - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} \right) - \frac{1^4}{4} + \frac{1^2}{2} = 0 =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

32.7 2)

Αρχικά θα βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g

$$\text{Έχουμε } f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - x = x - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 |x^2 - x - x + x^2| dx = \int_0^1 |2x^2 - 2x| dx$$

τα πρόσημα του $2x^2 - 2x = 2x(x-1)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$2x^2 - 2x$		+	○	-	○	+	

Επομένως

$$E = \int_0^1 |2x^2 - 2x| dx = \int_0^1 (-2x^2 + 2x) dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 = -2\frac{1^3}{3} + 1 - \left(-2\frac{0^3}{3} + 0 \right) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

32.7 3)

Αρχικά θα βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g

$$\text{Έχουμε } f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4x^2 = 6x - 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Delta = 1, \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} x_1 = \frac{3-1}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{3+1}{4} \Rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ή } x = 1$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 |4x^2 - 6x + 2| dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 2|2x^2 - 3x + 1| dx$$

τα πρόσημα του $2x^2 - 3x - 1 = 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2x^2 - 3x - 1$		0	0	
	+	-	+	

Επομένως

$$E = \int_{\frac{1}{2}}^1 |4x^2 - 6x + 2| dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 (-4x^2 + 6x - 2) dx = \left[-4\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2x \right]_{\frac{1}{2}}^1 =$$

$$= -\frac{4 \cdot 1^3}{3} + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - \left(-\frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \right) =$$

$$= -\frac{4}{3} + 3 - 2 - \left(-\frac{1}{6} + \frac{3}{4} - 1 \right) = -\frac{4}{3} + 1 + \frac{1}{6} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{12}$$

32.7 4)

Αρχικά θα βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g

Έχουμε

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 6x = x^2 \Leftrightarrow -2x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow -2x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 3$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_0^3 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^3 |-x^2 + 6x - x^2| dx = \int_0^3 |-2x^2 + 6x| dx$$

τα πρόσημα του $-2x^2 + 6x = -2x(x-3)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$-2x^2 + 6x$		0	0	
	-	+	-	

Επομένως

$$E = \int_0^3 |-2x^2 + 6x| dx = \int_0^3 (-2x^2 + 6x) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^3 = -\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 3 \cdot 3^2 - 0 = -18 + 27 = 9$$

32.7 5)

Αρχικά θα βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g

Έχουμε

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - 3x = x \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = 2$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_{-2}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^2 |x^3 - 3x - x| dx = \int_{-2}^2 |x^3 - 4x| dx$$

τα πρόσημα του $x^3 - 4x = x(x^2 - 2) = x(x-2)(x+2)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$x^3 - 4x$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως

$$\begin{aligned} E &= \int_{-2}^2 |x^3 - 4x| dx = \int_{-2}^0 |x^3 - 4x| dx + \int_0^2 |x^3 - 4x| dx = \\ &= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx + \int_0^2 (-x^3 + 4x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_0^2 = \\ &= 0 - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2 \right) - \frac{2^4}{4} + 2 \cdot 2^2 - 0 = -(4 - 8) - 4 + 8 = 8 \end{aligned}$$

32.7 6)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και η g έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$

Αρχικά θα βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g , για $x \in [0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } f(x) &= g(x) \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 = x \Leftrightarrow x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \end{aligned}$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 |x^2 - \sqrt{x}| dx$$

Είναι

$$x^2 - \sqrt{x} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}^4 - \sqrt{x} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}^3 - 1) < 0 \stackrel{\sqrt{x} > 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{x}^3 - 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3} < 1 \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} 0 \leq x < 1$$

Επομένως

$$E = \int_0^1 |x^2 - \sqrt{x}| dx = \int_0^1 (-x^2 + \sqrt{x}) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = -\frac{1^3}{3} + \frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 0 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

32.7 7)

Αρχικά θα βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g

$$\text{Έχουμε } f(x) = g(x) \Leftrightarrow x|x| = x \Leftrightarrow x|x| - x = 0 \Leftrightarrow x(|x| - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = 1$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^1 |x|x| - x| dx$$

τα πρόσημα του $x|x| - x = x(|x| - 1)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$x x -x$	-	0	+	0	-	0	+

Επομένως

$$E = \int_{-1}^1 |x|x| - x| dx = \int_{-1}^0 |x|x| - x| dx + \int_0^1 |x|x| - x| dx =$$

$$= \int_{-1}^0 (x|x| - x) dx + \int_0^1 (-x|x| + x) dx =$$

$$= \int_{-1}^0 (-x^2 - x) dx + \int_0^1 (-x^2 + x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 =$$

$$= 0 - \left(-\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} \right) - \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 0 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$