

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

32.6 1)

Αρχικά θα βρούμε που τέμνει τον άξονα x' η γραφική παράσταση της συνάρτησης f

$$\text{Έχουμε } f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

$$\text{Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι } E = \int_{-1}^1 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |3x^2 - 3| dx$$

τα πρόσημα του $3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$3x^2-3$		$+$	$-$	$+$

Επομένως

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^1 |3x^2 - 3| dx = \int_{-1}^1 (-3x^2 + 3) dx = \left[-x^3 + 3x \right]_{-1}^1 = -1^3 + 3 \cdot 1 - \left[-(-1)^3 + 3(-1) \right] = \\ &= -1 + 3 - 1 + 3 = \boxed{4} \end{aligned}$$

32.6 2)

Αρχικά θα βρούμε που τέμνει τον άξονα x' , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f

$$\text{Έχουμε } f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2$$

$$\text{Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι } E = \int_{-2}^2 |f(x)| dx = \int_{-2}^2 |4 - x^2| dx$$

τα πρόσημα του $4 - x^2 = (2-x)(2+x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$4-x^2$		$-$	$+$	$-$

Επομένως

$$\begin{aligned} E &= \int_{-2}^2 |4 - x^2| dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = 4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - \left(4(-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right) = \\ &= 8 - \frac{8}{3} - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

32.6 3)

Αρχικά θα βρούμε που τέμνει τον άξονα x' , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f

$$\Delta = 9, x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{1-3}{2} \Rightarrow x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{1+3}{2} \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Έχουμε } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 2$$

$$\text{Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι } E = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx$$

τα πρόσημα του $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$	
x^2-x-2		+	0	-	0	+

Επομένως

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 = \\ &= -\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) \right) = \\ &= -\frac{8}{3} + 6 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) = -\frac{8}{3} + 6 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

32.6 4)

Αρχικά θα βρούμε που τέμνει τον άξονα x' , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f

$$\text{Έχουμε } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 1, x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{3-1}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{3+1}{2} \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 2$$

$$\text{Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι } E = \int_0^2 |f(x)| dx = \int_0^2 |x^3 - 3x^2 + 2x| dx$$

τα πρόσημα του $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x+2)(x-3)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
x^3-3x^2+2x	-	0	+	0	-	0	+

Επομένως

$$\begin{aligned} E &= \int_0^2 |f(x)| dx = \int_0^2 |x^3 - 3x^2 + 2x| dx = \int_0^1 |x^3 - 3x^2 + 2x| dx + \int_1^2 |x^3 - 3x^2 + 2x| dx = \\ &= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 \right]_1^2 = \\ &= \frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2 - \left(\frac{0^4}{4} - 0^3 + 0^2 \right) - \frac{2^4}{4} + 2^3 - 2^2 - \left(-\frac{1^4}{4} + 1^3 - 1^2 \right) = \\ &= \frac{1}{4} - 4 + 8 - 4 + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$