

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

32.5 1)

$$\text{Είναι } E = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^1 |x^2 + 1 - 1 + x| dx = \int_{-1}^1 |x^2 + x| dx$$

τα πρόσημα του $x^2 + x = x(x+1)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x^2+x		+	0	-	0	+	

Επομένως

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^1 |x^2 + x| dx = \int_{-1}^0 |x^2 + x| dx + \int_0^1 |x^2 + x| dx = \\ &= \int_{-1}^0 (-x^2 - x) dx + \int_0^1 (x^2 + x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= -\frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} - \left(-\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} \right) + \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - \left(\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} \right) = \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

32.5 2)

$$\text{Είναι } E = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^1 |x^2 - x| dx$$

τα πρόσημα του $x^2 - x = x(x-1)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		+	0	-	0	+	

Επομένως

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^1 |x^2 - x| dx = \int_{-1}^0 |x^2 - x| dx + \int_0^1 |x^2 - x| dx = \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx + \int_0^1 (-x^2 + x) dx = \\ &= \left(\frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} \right) + \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} \right) - \left(-\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} \right) = \\ &= -\left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{1} \end{aligned}$$

32.5 3)

$$\text{Είναι } E = \int_{-2}^3 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^3 |x^2 - 2x - 3| dx$$

$$\Delta=16, x_{1,2}=\frac{2\pm4}{2} \begin{cases} \nearrow x_1=\frac{2+4}{2}\Rightarrow x_1=-1 \\ \searrow x_2=\frac{2+4}{2}\Rightarrow x_2=3 \end{cases}$$

τα πρόσημα του $x^2 - 2x - 3$ $= (x+1)(x-3)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
x^2-2x+3	+	0	0	+

Επομένως

$$\begin{aligned} E &= \int_{-2}^3 |x^2 - 2x - 3| dx = \int_{-2}^{-1} |x^2 - 2x - 3| dx + \int_{-1}^3 |x^2 - 2x - 3| dx = \\ &= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 2x - 3) dx + \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 = \\ &= \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 3(-1) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 - 3(-2) \right) - \frac{3^3}{3} + 3^2 + 3 \cdot 3 - \\ &\quad - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3(-1) \right) = \\ &= -\frac{1}{3} - 1 + 3 - \left(\frac{-8}{3} - 4 + 6 \right) - \cancel{\emptyset} + \cancel{\emptyset} + 9 - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) = \\ &= -\frac{1}{3} \cancel{-2} + \frac{8}{3} \cancel{-2} + 9 - \frac{1}{3} + 2 = 13 \end{aligned}$$

32.5 4)

$$\text{Είναι } E = \int_{-2}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^2 |x^3 - 3x - (-x^2 + 3x)| dx = \int_{-2}^2 |x^3 + x^2 - 6x| dx$$

$$\Delta=25, x_{1,2}=\frac{-1\pm5}{2} \begin{cases} \nearrow x_1=\frac{-1+5}{2}\Rightarrow x_1=-3 \\ \searrow x_2=\frac{-1+5}{2}\Rightarrow x_2=2 \end{cases}$$

$$\text{τα πρόσημα του } x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6) = x(x+3)(x-2)$$

φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$
x^3-x^2-6x	-	0	0	0	+

Επομένως

$$\begin{aligned} E &= \int_{-2}^2 |x^3 + x^2 - 6x| dx = \int_{-2}^0 |x^3 + x^2 - 6x| dx + \int_0^2 |x^3 + x^2 - 6x| dx = \\ &= \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 6x) dx + \int_0^2 (-x^3 - x^2 + 6x) dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} - 3 \cdot 0^2 - \left(\frac{(-2)^4}{4} + \frac{(-2)^3}{3} - 3(-2)^2 \right) - \frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} + 3 \cdot 2^2 - \left(-\frac{0^4}{4} - \frac{0^3}{3} + 3 \cdot 0^2 \right) =$$

$$= -\left(4 - \frac{8}{3} - 12 \right) - 4 - \frac{8}{3} + 12 = -4 + \cancel{\frac{8}{3}} + 12 - 4 - \cancel{\frac{8}{3}} + 12 = 16$$