Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

32.4 1)

Είναι $E=\int_{-3}^{3}|f(x)|dx=\int_{-3}^{3}|3x^2-6x|dx$

τα πρόσημα του $3x^2-6x=3x(x-2)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x^2-6x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Οπότε

$$E=\int_{-3}^{3}|3x^2-6x|dx=\int_{-3}^{0}|3x^2-6x|dx+\int_{0}^{2}|3x^2-6x|dx+\int_{2}^{3}|3x^2-6x|dx=$$

$$=\int_{-3}^{0}(3x^2-6x)dx+\int_{0}^{2}(-3x^2+6x)dx+\int_{2}^{3}(3x^2-6x)dx=$$

$$=\left[x^3-3x^2\right]_{-3}^{0}+\left[-x^3+3x^2\right]_{0}^{2}+\left[x^3-3x^2\right]_{2}^{3}=$$

$$=\left(0^3-3\cdot0^2\right)-\left[(-3)^3-3(-3)^2\right]+\left(-2^3+3\cdot2^2\right)-\left(-0^3+3\cdot0^2\right)+\left(3^3-3\cdot3^2\right)-\left(2^3-3\cdot2^2\right)=$$

$$=-(-27-27)+(-8+12)+(27-27)-(8-12)=54+4+4=\boxed{62}$$

32.4 2)

Είναι $E=\int_{-2}^{0}|f(x)|dx=\int_{-2}^{0}|x^3+x^2|dx$

τα πρόσημα του $x^3+x^2=x^2(x+1)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x^3+x^2		$-$	0	$+$	0	$+$	

Οπότε

$$E=\int_{-2}^{0}|x^3+x^2|dx=\int_{-2}^{-1}|x^3+x^2|dx+\int_{-1}^{0}|x^3+x^2|dx=\int_{-2}^{-1}(-x^3-x^2)dx+\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)dx=$$

$$=\int_{-2}^{-1}(-x^3-x^2)dx+\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)dx=\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}=$$

$$=-\frac{(-1)^4}{4}-\frac{(-1)^3}{3}-\left(-\frac{(-2)^4}{4}-\frac{(-2)^3}{3}\right)+\frac{0^4}{4}+\frac{0^3}{3}-\left(\frac{(-1)^4}{4}+\frac{(-1)^3}{3}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\left(-4+\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+4-\frac{8}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$$

32.4 3)

Είναι $E=\int_{-2}^{2}\left|f\left(x\right)\right|dx=\int_{-2}^{2}\left|x^3-x\right|dx$

τα πρόσημα του $x^3-x=x\left(x^2-1\right)=x\left(x-1\right)\left(x+1\right)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^3-x		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Οπότε

$$E=\int_{-2}^{2}\left|x^3-x\right|dx=\int_{-2}^{-1}\left|x^3-x\right|dx+\int_{-1}^{0}\left|x^3-x\right|dx+\int_{0}^{1}\left|x^3-x\right|dx+\int_{1}^{2}\left|x^3-x\right|dx=$$

$$=\int_{-2}^{-1}\left(-x^3+x\right)dx+\int_{-1}^{0}\left(x^3-x\right)dx+\int_{0}^{1}\left(-x^3+x\right)dx+\int_{1}^{2}\left(x^3-x\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}=$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}=$$

$$=-\frac{\left(-1\right)^4}{4}+\frac{\left(-1\right)^2}{2}-\left(-\frac{\left(-2\right)^4}{4}+\frac{\left(-2\right)^2}{2}\right)+\frac{0^4}{4}-\frac{0^2}{2}-\left(\frac{\left(-1\right)^4}{4}-\frac{\left(-1\right)^2}{2}\right)-$$

$$-\frac{1^4}{4}+\frac{1^2}{2}-\left(-\frac{0^4}{4}+\frac{0^2}{2}\right)+\frac{2^4}{4}-\frac{2^2}{2}-\left(\frac{1^4}{4}-\frac{1^2}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\left(-4+2\right)-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+4-2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=5$$

32.4 4)

Είναι $E=\int_{0}^{3}\left|f\left(x\right)\right|dx=\int_{0}^{3}\left|x^2-3x+2\right|dx$

τα πρόσημα του $x^2-3x+2 \overset{\Delta=1,\ x_{1,2}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases}x_1=\frac{3-1}{2}\Rightarrow x_1=1\\ x_2=\frac{3+1}{2}\Rightarrow x_2=2\end{cases}}{=} \left(x-1\right)\left(x-2\right)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Οπότε

$$E=\int_{0}^{3}\left|x^2-3x+2\right|dx=\int_{0}^{1}\left|x^2-3x+2\right|dx+\int_{1}^{2}\left|x^2-3x+2\right|dx+\int_{2}^{3}\left|x^2-3x+2\right|dx=$$

$$=\int_{0}^{1}\left(x^2-3x+2\right)dx+\int_{1}^{2}\left(x^2+3x-2\right)dx+\int_{2}^{3}\left(x^2-3x+2\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^1+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-2x\right]_1^2+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_2^3=$$

$$=\frac{1^3}{3}-\frac{3\cdot1^2}{2}+2\cdot1-\left(\frac{0^3}{3}-\frac{3\cdot0^2}{2}+2\cdot0\right)-\frac{2^3}{3}+\frac{3\cdot2^2}{2}-2\cdot2-\left(-\frac{1^3}{3}+\frac{3\cdot1^2}{2}-2\cdot1\right)+$$

$$+\frac{3^3}{3}-\frac{3\cdot3^2}{2}+2\cdot3-\left(\frac{2^3}{3}-\frac{3\cdot2^2}{2}+2\cdot2\right)=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2-\frac{8}{3}+6-4-\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2\right)+9-\frac{27}{2}+6-\left(\frac{8}{3}-6+4\right)=$$

$$=\frac{1}{3}-\cancel{\frac{3}{2}}-\frac{8}{3}+4+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2+\cancel{15}-\cancel{\frac{27}{2}}-\frac{8}{3}+2=\frac{11}{6}$$