

- α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες 0 και π . Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_0^\pi |f(x)| dx = \int_0^\pi |\eta\mu x| dx \stackrel{x \in [0, \pi] \Rightarrow \eta\mu x \geq 0}{=} \int_0^\pi \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 2$$

- β) Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $(\alpha, f(\alpha))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = f'(\alpha) \stackrel{f'(x) = \sigma\upsilon\nu x}{\Rightarrow} \lambda = \sigma\upsilon\nu\alpha$$

οπότε η ευθεία που είναι κάθετη σε αυτήν την εφαπτόμενη

$$\text{θα έχει συντελεστή διεύθυνσης } \lambda_\epsilon = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

και επειδή διέρχεται από το σημείο $(\alpha, f(\alpha)) = (\alpha, \eta\mu\alpha)$ θα έχει εξίσωση

$$y - \eta\mu\alpha = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}(x - \alpha) \Rightarrow y = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}(x - \alpha) + \eta\mu\alpha$$

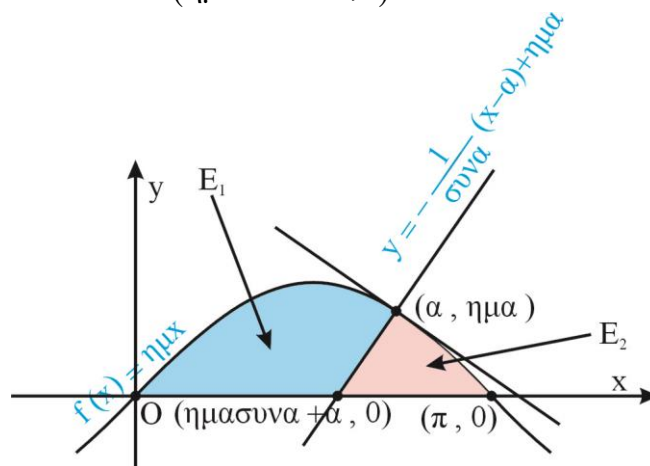
Για $y = 0$ είναι

$$y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}(x - \alpha) + \eta\mu\alpha \Rightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}(x - \alpha) = \eta\mu\alpha \Rightarrow x - \alpha = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \alpha$$

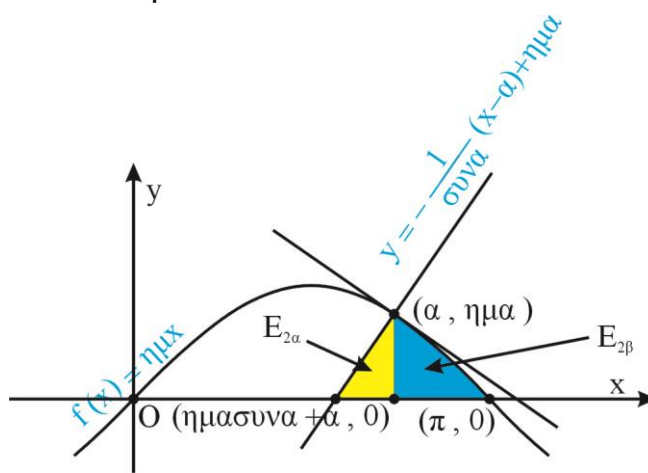
Άρα η παραπάνω ευθεία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \alpha, 0)$

Τα δύο χωρία E_1 και E_2 που διαιρεί το χωρίο του προηγούμενου ερωτήματος φαίνονται στο διπλανό σχήμα



Θα υπολογίσουμε (επειδή είναι πιο εύκολο) το εμβαδό του E_2

Για να το υπολογίσουμε θα το χωρίσουμε σε δύο χωρία $E_{2\alpha}$ και $E_{2\beta}$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα



$$\begin{aligned}
E_2 &= E_{2\alpha} + E_{2\beta} = \int_{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+\alpha}^{\alpha} \left[-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} (x-\alpha) + \eta\mu\alpha \right] dx + \int_{\alpha}^{\pi} \eta\mu x dx = \\
&= \left[-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \left(\frac{x^2}{2} - \alpha x \right) + (\eta\mu\alpha) \cdot x \right]_{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+\alpha}^{\alpha} + [-\sigma\upsilon\nu x]_{\alpha}^{\pi} = \\
&= -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \left[\frac{x^2 - 2\alpha x}{2} \right]_{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+\alpha}^{\alpha} + \eta\mu\alpha [x]_{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+\alpha}^{\alpha} - [\sigma\upsilon\nu x]_{\alpha}^{\pi} = \\
&= -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \left[\frac{x(x-2\alpha)}{2} \right]_{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+\alpha}^{\alpha} + \eta\mu\alpha \cdot (\cancel{\alpha} - \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - \cancel{\alpha}) - (\sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu\alpha) = \\
&= -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \left[\frac{\alpha(-\alpha)}{2} - \frac{(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \alpha)(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \alpha - 2\alpha)}{2} \right] - \eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - (-1 - \sigma\upsilon\nu\alpha) = \\
&= -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \left[\frac{-\alpha^2}{2} - \frac{(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \alpha)(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - \alpha)}{2} \right] - \eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + 1 + \sigma\upsilon\nu\alpha = \\
&= -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \left(\frac{-\alpha^2}{2} - \frac{\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \alpha^2}{2} \right) - \eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + 1 + \sigma\upsilon\nu\alpha = \\
&= -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \frac{\cancel{-\alpha^2} - \eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \cancel{\alpha^2}}{2} - \eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + 1 + \sigma\upsilon\nu\alpha = \\
&= -\frac{1}{\cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha}} \frac{-\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{2} - \eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + 1 + \sigma\upsilon\nu\alpha = \\
&= \frac{\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{2} - \eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + 1 + \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{-\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + 2 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2} = \\
&= \frac{-(1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha + 2 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2} = \frac{-\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu^3\alpha + 2 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2} = \\
&= \frac{2 + \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu^3\alpha}{2}
\end{aligned}$$

Επομένως το εμβαδό του E_1 είναι

$$E_1 = E - E_2 = 2 - \frac{2 + \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu^3\alpha}{2} = \frac{4 - 2 - \sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu^3\alpha}{2} = \frac{2 - \sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu^3\alpha}{2}$$

Οπότε η κάθετη στην εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $(\alpha, f(\alpha))$ διαιρεί το παραπάνω χωρίο σε δύο μέρη E_1 και E_2 που έχουν λόγο εμβαδών

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{2 - \sigma \nu \alpha - \sigma \nu^3 \alpha}{\cancel{2}}}{\frac{2 + \sigma \nu \alpha + \sigma \nu^3 \alpha}{\cancel{2}}} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{2 - \sigma \nu \alpha - \sigma \nu^3 \alpha}{2 + \sigma \nu \alpha + \sigma \nu^3 \alpha}$$