

- α) Η f ορίζεται όταν $\frac{1-x}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$. Είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{(1-x)'x - (1-x)}{x^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{-1 - 1 + x}{x^2} = -\frac{1}{x(1-x)} \stackrel{x \in (0,1)}{<} 0$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ άρα είναι 1-1 και άρα είναι αντιστρέψιμη

- β) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$, άρα

$$\boxed{f(A)} = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{1-x}{x}, \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{1-x}{x} \right)$$

$\begin{matrix} \text{θέτουμε } y = \frac{1-x}{x} \\ \text{όταν } x \rightarrow 1^- \text{ τότε } y \rightarrow 0^+ \end{matrix}$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{1-x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty$

$\begin{matrix} \text{θέτουμε } y = \frac{1-x}{x} \\ \text{όταν } x \rightarrow 0^+ \text{ τότε } y \rightarrow +\infty \end{matrix}$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{1-x}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty$

$$= (-\infty, +\infty) = \boxed{\mathbb{R}}$$

Οπότε η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

Θα βρούμε τώρα τον τύπο της αντίστροφης Έχουμε

$$f(x) = y \Rightarrow \ln \frac{1-x}{x} = y \Rightarrow \frac{1-x}{x} = e^y \Rightarrow xe^y = 1-x \Rightarrow xe^y + x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(e^y + 1) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{e^y + 1}$$

και άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $f^{-1}(x) = \frac{1}{e^x + 1}$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_0^1 |f^{-1}(x)| dx = \int_0^1 \left| \frac{1}{e^x + 1} \right| dx \stackrel{\frac{1}{e^x+1} > 0}{=} \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$$

$$\text{θέτουμε } y = e^x \Rightarrow dy = e^x dx \Rightarrow dy = y dx \Rightarrow dx = \frac{dy}{y}$$

$$\begin{matrix} \text{για } x=0 \Rightarrow y=e^0=1 \\ \text{για } x=1 \Rightarrow y=e^1=e \end{matrix}$$

$$= \int_1^e \frac{1}{y+1} \frac{1}{y} dy \Rightarrow E = \int_1^e \frac{1}{y(y+1)} dy \quad (1)$$

Θα πρέπει να βρούμε τα A και B ώστε $\frac{1}{y(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1}$

Έχουμε

$$\frac{1}{y(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{y(y+1)} \frac{1}{\cancel{y(y+1)}} = \cancel{y} \cancel{(y+1)} \frac{A}{\cancel{y}} + \cancel{y} \cancel{(y+1)} \frac{B}{\cancel{y+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = A(y+1) + By \Rightarrow 1 = Ay + A + By \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = (A+B)y + A \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \overset{\text{λύνουμε το σύστημα}}{\Rightarrow} \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\text{Οπότε } \frac{1}{y(y+1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \quad (2)$$

Άρα

$$(1), (2) \Rightarrow E = \int_1^e \frac{1}{y(y+1)} dy = \int_1^e \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} dy = \int_1^e \frac{1}{y} dy - \int_1^e \frac{1}{y+1} dy =$$

$$= [\ln|y|]_1^e - [\ln|y+1|]_1^e = (\ln|e| - \ln|1|) - (\ln|e+1| - \ln|1+1|) =$$

$$= 1 - \ln(e+1) + \ln 2 = 1 + \ln \frac{2}{e+1}$$