

Αρχικά θα βρούμε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της f

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ ή $x = 1$

Τα πρόσημα της f' ή μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		4		0	

Άρα η f έχει

τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -1$ ίσο με $f(-1) = 4$, άρα $\rho_1 = -1$

τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 1$ ίσο με $f(1) = 0$

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f''(x) = 6x$

Είναι $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

Τα πρόσημα της f'' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	σημείο καμπής	↗	

από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f έχει σημείο καμπής στο $x_3 = 0$ άρα

$\rho_2 = 0$

Τώρα θα βρούμε την εφαπτομένη της στο τοπικό ελάχιστο δηλαδή στο $(1, 0)$

Είναι $f'(1) = 0$ οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = 0}$ δηλαδή ο άξονας $x'x$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_{-1}^0 |f(x)| dx = \int_{-1}^0 |x^3 - 3x + 2| dx$$

Παραγοντοποιούμε με σχήμα Horner το πολυώνυμο $x^3 - 3x + 2$ (έχει ρίζα το 1) και

$$\Delta = 9, \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1-3}{2} \Rightarrow x_1 = -2 \\ x_2 = \frac{-1+3}{2} \Rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$$

έχουμε $x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)^2(x+2)$

Επομένως στο διάστημα $[-1, 0]$ είναι $x^3 - 3x + 2 > 0$. Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_{-1}^0 |x^3 - 3x + 2| dx \stackrel{x^3 - 3x + 2 \geq 0}{=} \int_{-1}^0 (x^3 - 3x + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^0 =$$

$$= 0 - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{3(-1)^2}{2} + 2(-1) \right] = 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2 \right) = \frac{13}{4}$$