

Αρχικά θα βρούμε τους τύπους των συναρτήσεων f και g . Είναι

$$f(x) = x^3 + \int_{-1}^0 e^{x+1} dx + 1 - e \Rightarrow f(x) = x^3 + [e^{x+1}]_{-1}^0 + 1 - e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + e^{0+1} - e^{-1+1} + 1 - e \Rightarrow f(x) = x^3 + \cancel{e} - \cancel{1} + 1 - \cancel{e} \Rightarrow \boxed{f(x) = x^3}$$

Ακόμη

$$g(x) = \int_0^x (3t^2 + 2t - 1) dt - 2 \Rightarrow g(x) = [t^3 + t^2 - t]_0^x - 2 \Rightarrow \boxed{g(x) = x^3 + x^2 - x - 2}$$

Τώρα θα βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g

Έχουμε

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 = x^3 + x^2 - x - 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 9, x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1-3}{2} \Rightarrow x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{1+3}{2} \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 2$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx$$

τα πρόσημα του $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$		0	0	
	+	-	+	

Επομένως

$$E = \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 =$$

$$= -\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) \right) =$$

$$= -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) = -\frac{8}{3} + 6 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{2}$$