

- α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$

για να διέρχεται από το $(1, 0)$ πρέπει

$$\boxed{f(1) = 0} \Rightarrow 1^3 + \alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = -1 \quad (1)$$

για να παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ τοπικό ακρότατο σύμφωνα με το θεώρημα

Fermat πρέπει $\boxed{f'(-1) = 0} \Rightarrow 3(-1)^2 + 2\alpha(-1) + \beta = 0 \Rightarrow -2\alpha + \beta = -3 \quad (2)$

για να παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο σύμφωνα με το θεώρημα Fermat

πρέπει $\boxed{f'(1) = 0} \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2\alpha \cdot 1 + \beta = 0 \Rightarrow 2\alpha + \beta = -3 \quad (3)$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) και (3) βρίσκουμε $\alpha = 0$, $\beta = -3$ και $\gamma = 2$

Επαλήθευση

Για $\alpha = 0$, $\beta = -3$ και $\gamma = 2$ είναι $f(x) = x^3 - 3x + 2$ και

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow \boxed{4}$	$\searrow \boxed{0}$	$\nearrow$	

Από τον πίνακα αυτό διαπιστώνουμε ότι πράγματι η f παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ και στο $x_1 = 1$ τοπικά ακρότατα

- β) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με $f'(x) = 3x^2 - 3$ και $f''(x) = 6x$

$$\text{Είναι } f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$			↘	↗	
			σημείο καμπής		

από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f έχει σημείο καμπής στο $x_2 = 0$

από τον πίνακα μονοτονίας του προηγούμενου ερωτήματος προκύπτει ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 1$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 |x^3 - 3x + 2| dx$$

Παραγοντοποιούμε με σχήμα Horner το πολυώνυμο $x^3 - 3x + 2$ (έχει ρίζα το 1) και έχουμε

$$\Delta=9, \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-1-3}{2} \Rightarrow x_1 = -2 \\ x_2 = \frac{-1+3}{2} \Rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$$

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)^2 (x+2)$$

Επομένως στο διάστημα $[0,1]$ είναι $x^3 - 3x + 2 \geq 0$. Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_0^1 |x^3 - 3x + 2| dx \stackrel{x^3 - 3x + 2 \geq 0}{=} \int_0^1 (x^3 - 3x + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1^4}{4} - \frac{3 \cdot 1^2}{2} + 2 \cdot 1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{4}$$