Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

32.14

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\int_{-3}^{-1}|f(x)-g(x)|dx$

Έχουμε

$$f''(x)=g''(x)+2\Rightarrow f''(x)=\left(g''(x)+2x\right)'\Rightarrow f'(x)=g'(x)+2x+c \quad (1)$$

και ακόμη

$$(1)\overset{x=-1}{\Rightarrow} f'(-1)=g'(-1)+2(-1)+c \overset{f'(-1)=g'(-1)}{\Rightarrow} c-2=0\Rightarrow c=2 \quad (2)$$

Οπότε

$$(1),(2)\Rightarrow f'(x)=g'(x)+2x+2\Rightarrow f'(x)=\left[g(x)+x^2+2x\right]'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=g(x)+x^2+2x+c_1 \quad (3)$$

ακόμη

$$(3)\overset{x=0}{\Rightarrow} f(0)=g(0)+0^2+2\cdot 0+c_1 \overset{f(0)=g(0)}{\Rightarrow} c_1=0 \quad (4)$$

Οπότε

$$(3),(4)\Rightarrow f(x)=g(x)+x^2+2x\Rightarrow f(x)-g(x)=x^2+2x \quad (5)$$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_{-3}^{-1}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-3}^{-1}|f(x)-g(x)|dx\overset{(5)}{=}\int_{-3}^{-1}|x^2+2x|dx=$$

$$\overset{\substack{x^2+2x>0\Leftrightarrow x<-2 \text{ ή } x>0\\ x^2+2x<0\Leftrightarrow -2<x<0}}{=}\int_{-3}^{-2}|x^2+2x|dx+\int_{-2}^{-1}|x^2+2x|dx=\int_{-3}^{-2}(x^2+2x)dx+\int_{-2}^{-1}(-x^2-2x)dx=$$

$$=\int_{-3}^{-2}(x^2+2x)dx+\int_{-2}^{-1}(-x^2-2x)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{-3}^{-2}+\left[-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^{-1}=$$

$$=\frac{(-2)^3}{3}+(-2)^2-\left(\frac{(-3)^3}{3}+(-3)^2\right)-\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2-\left(-\frac{(-2)^3}{3}-(-2)^2\right)=$$

$$=-\frac{8}{3}+4-\cancel{(-9+9)}+\frac{1}{3}-1-\left(\frac{8}{3}-4\right)=-\frac{8}{3}+4+\frac{1}{3}-1-\frac{8}{3}+4=2$$