

32.12 1)

Το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 9$ είναι

$$E = \int_1^9 \left| \frac{1}{x} \right| dx = \int_1^9 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^9 = \ln 9 - \ln 1 = \ln 9$$

Οπότε η ευθεία $x = \alpha$ θα χωρίζει το παραπάνω χωρίο σε δύο ισεμβαδικά μέρη όταν ισχύει $1 < \alpha < 9$ και

$$\int_1^\alpha |f(x)| dx = \frac{\ln 9}{2} \Leftrightarrow \int_1^\alpha \left| \frac{1}{x} \right| dx = \frac{\ln 9}{2} \Leftrightarrow \int_1^\alpha \frac{1}{x} dx = \frac{\ln 9}{2} \Leftrightarrow [\ln x]_1^\alpha = \frac{\ln 9}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln \alpha - \ln 1 = \frac{\ln 9}{2} \Leftrightarrow 2 \ln \alpha = \ln 9 \Leftrightarrow \ln \alpha^2 = \ln 9 \Leftrightarrow \alpha^2 = 9 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

Οπότε η ζητούμενη ευθεία είναι η ευθεία $x = 3$

32.12 2)

Το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$ είναι

$$E = \int_1^3 \left| -\frac{1}{x^2} \right| dx = \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^3 = -\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{1} \right) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

Οπότε η ευθεία $x = \alpha$ θα χωρίζει το παραπάνω χωρίο σε δύο ισεμβαδικά μέρη όταν ισχύει $1 < \alpha < 3$ και

$$\int_1^\alpha |f(x)| dx = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \int_1^\alpha \left| -\frac{1}{x^2} \right| dx = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \int_1^\alpha \frac{1}{x^2} dx = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\alpha = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\alpha} + 1 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{\alpha} = \frac{2}{3} - 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \alpha = 3$$

Οπότε η ζητούμενη ευθεία είναι η ευθεία $x = \frac{3}{2}$

32.12 3)

α) Έστω E το ζητούμενο εμβαδό. Είναι

$$E = \int_0^3 |f(x)| dx = \int_0^3 |x^2 + 1| dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^3 = \frac{3^3}{3} + 3 - 0 = 12$$

β) $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{8} \Rightarrow E_2 = 8E_1$

$$\text{Όμως } E_1 + E_2 = E \Rightarrow E_1 + 8E_1 = 12 \Rightarrow 9E_1 = 12 \Rightarrow E_1 = \frac{12}{9} \Rightarrow \int_0^a |f(x)| dx = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^a |x^2 + 1| dx = \frac{4}{3} \Rightarrow \int_0^a (x^2 + 1) dx = \frac{4}{3} \Rightarrow \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^a = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\alpha^3}{3} + \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^3 + 3\alpha = 4 \Rightarrow \alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \begin{array}{c} \text{παραγοντοποίηση} \\ \text{με Horner} \\ \text{ρίζα } \rho = 1 \end{array} (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 4) = 0 \Rightarrow \begin{array}{c} \alpha^2 + \alpha + 4 \\ \Delta = -15 < 0 \end{array} \Rightarrow \alpha = 1$$

32.12 4)

Ισχύει $1 < \alpha < 3$ και

$$\frac{\int_1^a |f(x)| dx}{\int_a^3 |f(x)| dx} = \frac{3}{13} \Leftrightarrow \frac{\int_1^a |x^3| dx}{\int_a^3 |x^3| dx} = \frac{3}{13} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 1 < \alpha < 3 \Rightarrow x^3 > 0 \end{array} \frac{\int_1^a x^3 dx}{\int_a^3 x^3 dx} = \frac{3}{13} \Leftrightarrow \frac{\left[\frac{x^4}{4} \right]_1^a}{\left[\frac{x^4}{4} \right]_a^3} = \frac{3}{13} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\alpha^4}{4} - \frac{1^4}{4}}{\frac{3^4}{4} - \frac{\alpha^4}{4}} = \frac{3}{13} \Leftrightarrow \frac{\cancel{4}(\alpha^4 - 1)}{\cancel{4}(81 - \alpha^4)} = \frac{3}{13} \Leftrightarrow \frac{\alpha^4 - 1}{81 - \alpha^4} = \frac{3}{13} \Leftrightarrow 13(\alpha^4 - 1) = 3(81 - \alpha^4) \Leftrightarrow$$

$$13\alpha^4 - 13 = 243 - 3\alpha^4 \Leftrightarrow 16\alpha^4 = 256 \Leftrightarrow \alpha^4 = 16 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \alpha = 2$$

Οπότε η ζητούμενη ευθεία είναι η ευθεία $x = 2$