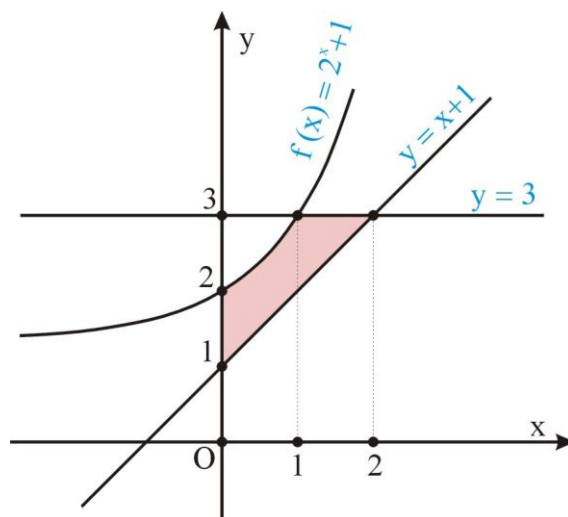
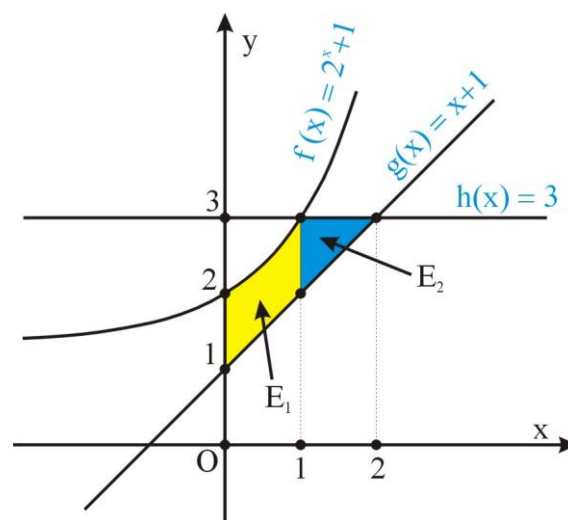


Επειδή έχουμε τρεις συναρτήσεις, θα πρέπει να κάνουμε σχήμα

Το ζητούμενο εμβαδό E είναι το εμβαδό του χρωματισμένου χωρίου του διπλανού σχήματος



Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδό θα το χωρίσουμε σε δύο χωρία E_1 και E_2 όπως φαίνεται στο σχήμα, στο οποίο η ευθεία $y = x + 1$ είναι στην ουσία η συνάρτηση g με $g(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $y = 3$ είναι στην ουσία η συνάρτηση h με $h(x) = 3$, $x \in \mathbb{R}$



Έτσι λοιπόν έχουμε (λόγω σχήματος δεν χρειαζόμαστε τα απόλυτα)

$$E = E_1 + E_2 =$$

$$= \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx + \int_1^2 [h(x) - g(x)] dx =$$

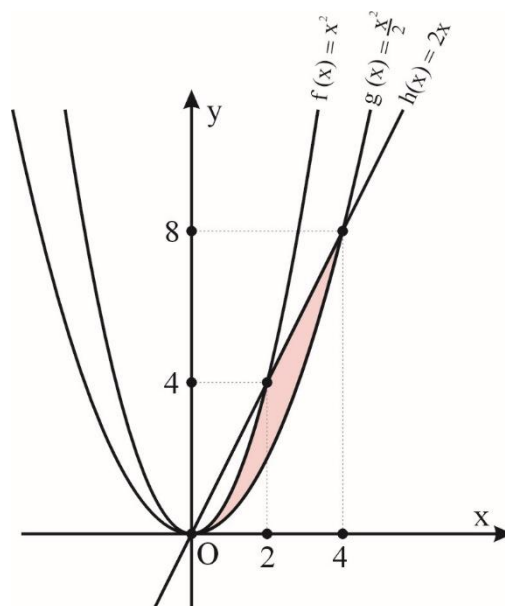
$$= \int_0^1 (2^x + 1 - x - 1) dx + \int_1^2 (3 - x - 1) dx = \int_0^1 (2^x - x) dx + \int_1^2 (2 - x) dx =$$

$$= \left[\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \left(\frac{2^1}{\ln 2} - \frac{1^2}{2} \right) - \frac{2^0}{\ln 2} + \left(2 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} \right) - \left(2 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} \right) =$$

$$= \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln 2} + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{\ln 2}$$

Επειδή έχουμε τρεις συναρτήσεις, θα πρέπει να κάνουμε σχήμα

Το ζητούμενο εμβαδό E είναι το εμβαδό του χρωματισμένου χωρίου του διπλανού σχήματος



Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδό θα το χωρίσουμε σε δύο χωρία E_1 και E_2 όπως φαίνεται στο σχήμα και θα έχουμε (λόγω σχήματος δεν χρειαζόμαστε τα απόλυτα)

$$E = E_1 + E_2 =$$

$$= \int_0^2 [f(x) - g(x)] dx + \int_2^4 [h(x) - g(x)] dx =$$

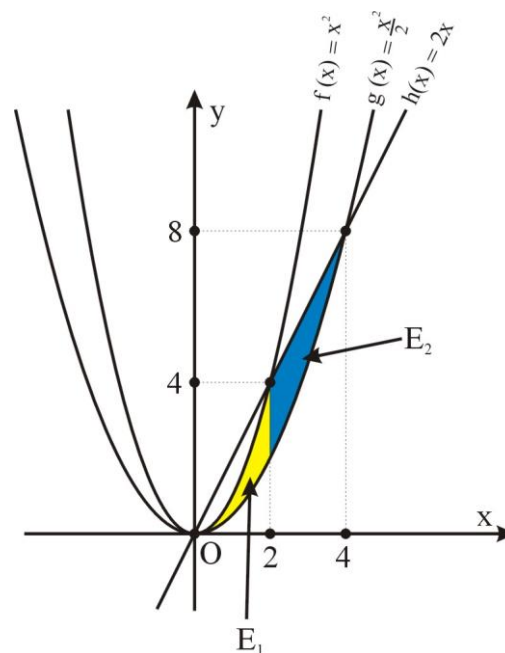
$$= \int_0^2 x^2 - \frac{x^2}{2} dx + \int_2^4 2x - \frac{x^2}{2} dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx + \int_2^4 \frac{4x - x^2}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \frac{1}{2} \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_2^4 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(2 \cdot 2^2 - \frac{2^3}{3} \right) =$$

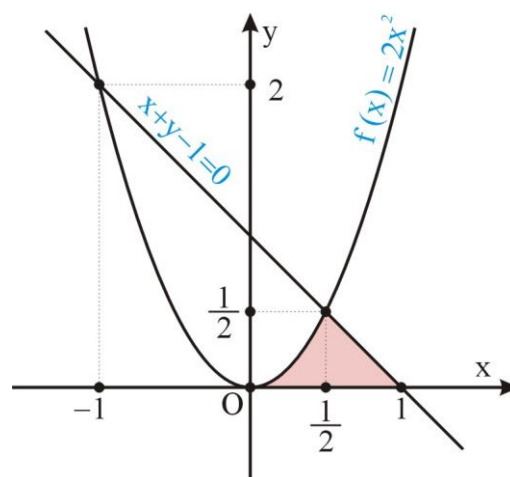
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{24}{6} = \boxed{4}$$



32.11 3)

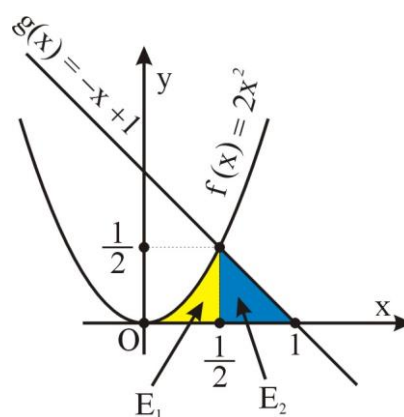
Επειδή έχουμε τρεις συναρτήσεις, θα πρέπει να κάνουμε σχήμα

Το ζητούμενο εμβαδό E είναι το εμβαδό του χρωματισμένου χωρίου του διπλανού σχήματος



Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδό θα το χωρίσουμε σε δύο χωρία E_1 και E_2 όπως φαίνεται στο σχήμα, στο οποίο η ευθεία $x + y - 1 = 0$ είναι στην ουσία η συνάρτηση g με $g(x) = -x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

Έτσι λοιπόν έχουμε (λόγω σχήματος δεν χρειαζόμαστε τα απόλυτα)



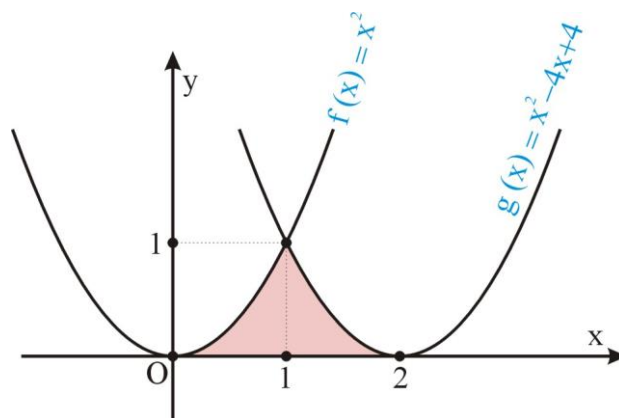
$$E = E_1 + E_2 =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 g(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-x + 1) dx = \\ &= 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_{\frac{1}{2}}^1 = 2 \left(\frac{\frac{1}{8}}{3} \right) - \frac{1^2}{2} + 1 - \left(-\frac{\frac{1}{4}}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{12} + \cancel{\frac{1}{2}} - 1 + \frac{1}{8} - \cancel{\frac{1}{2}} = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

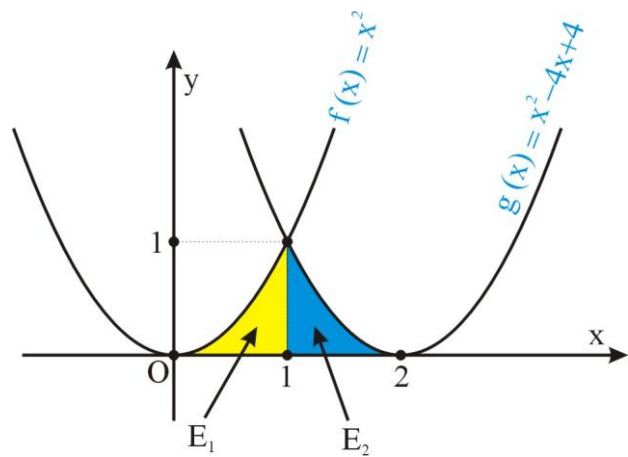
32.11 4)

Επειδή έχουμε τρεις συναρτήσεις, θα πρέπει να κάνουμε σχήμα

Το ζητούμενο εμβαδό E είναι το εμβαδό του χρωματισμένου χωρίου του διπλανού σχήματος



Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδό θα το χωρίσουμε σε δύο χωρία E_1 και E_2 όπως φαίνεται στο σχήμα και θα έχουμε (λόγω σχήματος δεν χρειαζόμαστε τα απόλυτα)



$$E = E_1 + E_2 =$$

$$= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 g(x) dx =$$

$$= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx =$$

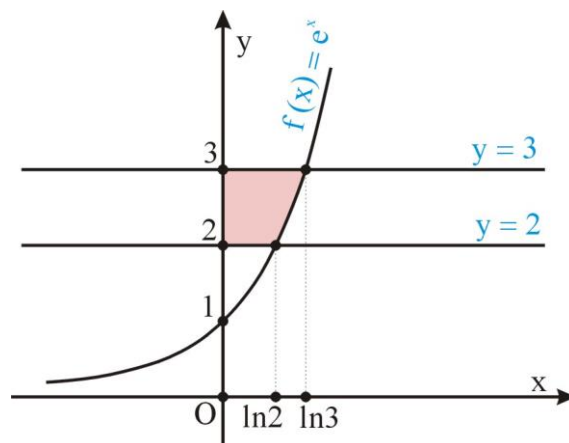
$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_1^2 = \frac{1}{3} + \left(\frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 8 + 8 - \frac{1}{3} + 2 - 4 = \frac{2}{3}$$

32.11 5)

Επειδή έχουμε τρεις συναρτήσεις, θα πρέπει να κάνουμε σχήμα

Το ζητούμενο εμβαδό E είναι το εμβαδό του χρωματισμένου χωρίου του διπλανού σχήματος



Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδό θα το χωρίσουμε σε δύο χωρία E_1 και E_2 όπως φαίνεται στο σχήμα, στο οποίο η ευθεία $y = 2$ είναι στην ουσία η συνάρτηση g με $g(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $y = 3$ είναι στην ουσία η συνάρτηση h με $h(x) = 3$, $x \in \mathbb{R}$

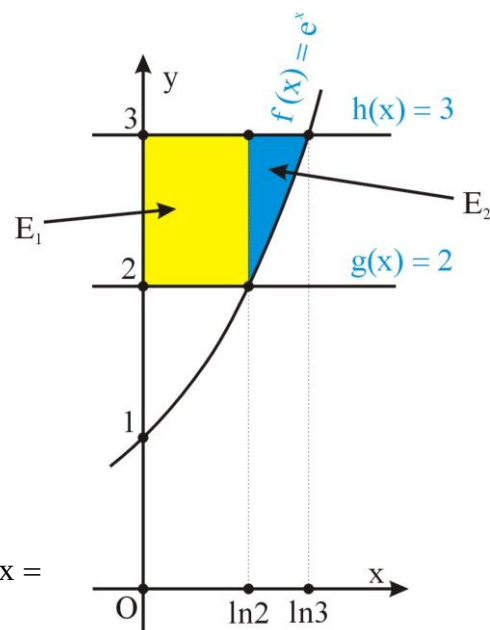
Έτσι λοιπόν έχουμε (λόγω σχήματος δεν χρειαζόμαστε τα απόλυτα)

$$E = E_1 + E_2 =$$

$$= \int_0^{\ln 2} [h(x) - g(x)] dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} [h(x) - f(x)] dx =$$

$$= \int_0^{\ln 2} [3 - 2] dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} [3 - e^x] dx =$$

$$= 1[\ln 2 - 0] + [3x - e^x]_{\ln 2}^{\ln 3} = \ln 2 + (3\ln 3 - e^{\ln 3}) - (3\ln 2 - e^{\ln 2}) =$$

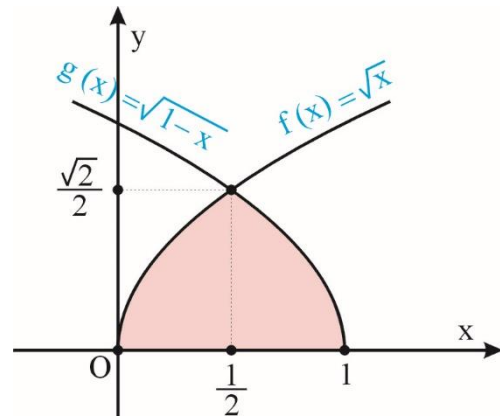


$$= \ln 2 + 3 \ln 3 - 3 - 3 \ln 2 + 2 = 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1$$

32.11 6)

Επειδή έχουμε τρεις συναρτήσεις, θα πρέπει να κάνουμε σχήμα

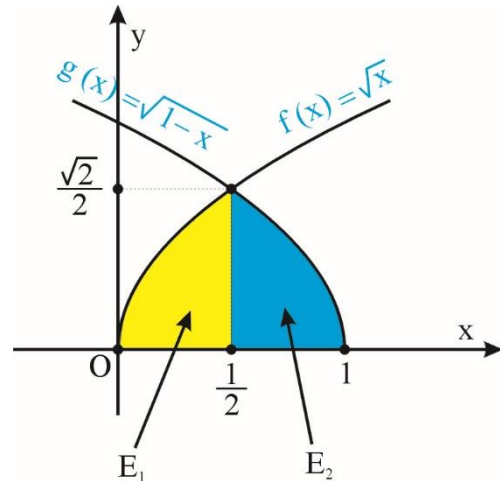
Το ζητούμενο εμβαδό E είναι το εμβαδό του χρωματισμένου χωρίου του διπλανού σχήματος



Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδό θα το χωρίσουμε σε δύο χωρία E_1 και E_2 όπως φαίνεται στο σχήμα και θα έχουμε (λόγω σχήματος δεν χρειαζόμαστε τα απόλυτα)

$$E = E_1 + E_2 =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 g(x) dx =$$



$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{x} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x} dx$$

θέτουμε $y = 1-x \Rightarrow dy = -dx$
 για $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
 για $x = 1 \Rightarrow y = 1 - 1 = 0$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^0 \sqrt{y} dy = - \int_{\frac{1}{2}}^0 \sqrt{y} dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{y} dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{x} dx$$

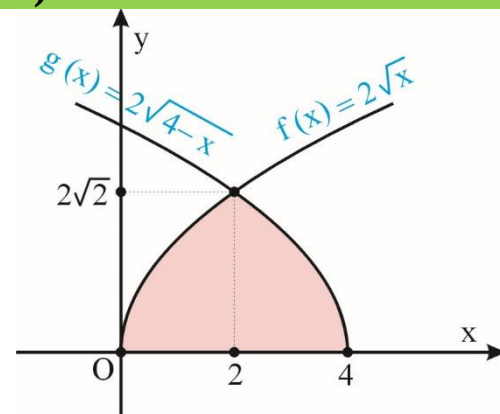
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{x} dx =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = 2 \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{2^3}} = \frac{4}{3} \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{3 \cdot \cancel{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

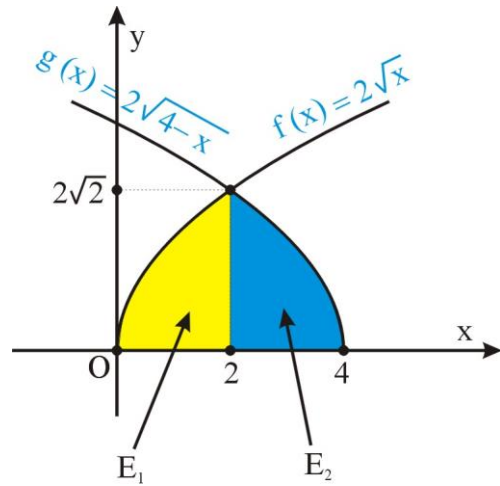
32.11 7)

Επειδή έχουμε τρεις συναρτήσεις, θα πρέπει να κάνουμε σχήμα

Το ζητούμενο εμβαδό E είναι το εμβαδό του χρωματισμένου χωρίου του διπλανού σχήματος



Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδό θα το χωρίσουμε σε δύο χωρία E_1 και E_2 όπως φαίνεται στο σχήμα και θα έχουμε (λόγω σχήματος δεν χρειαζόμαστε τα απόλυτα)



$$E = E_1 + E_2 =$$

$$= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 g(x) dx =$$

$$= \int_0^2 2\sqrt{x} dx + \int_2^4 2\sqrt{4-x} dx$$

$\begin{matrix} \text{θέτουμε } y=4-x \Rightarrow dy=-dx \\ \text{για } x=2 \Rightarrow y=4-2=2 \\ \text{για } x=4 \Rightarrow y=4-4=0 \end{matrix} \quad \int_2^4 2\sqrt{4-x} dx = -\int_2^0 2\sqrt{y} dy = \int_0^2 2\sqrt{y} dy = \int_0^2 2\sqrt{x} dx$

$$= \int_0^2 2\sqrt{x} dx + \int_0^2 2\sqrt{x} dx = 4 \int_0^2 x^{\frac{1}{2}} dx = 4 \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = 4 \cdot \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{8\sqrt{2}^3}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

32.11 8)

α) Έστω $f(x) = -x^2 + 3x$, οπότε $f'(x) = -2x + 3$

Είναι $f(1) = -1^2 + 3 \cdot 1 = 2$ (1) και $f'(1) = -2 \cdot 1 + 3 = 1$ (2)

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο με τετμημένη 1 θα είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow \boxed{y = x + 1}$$

Ακόμη

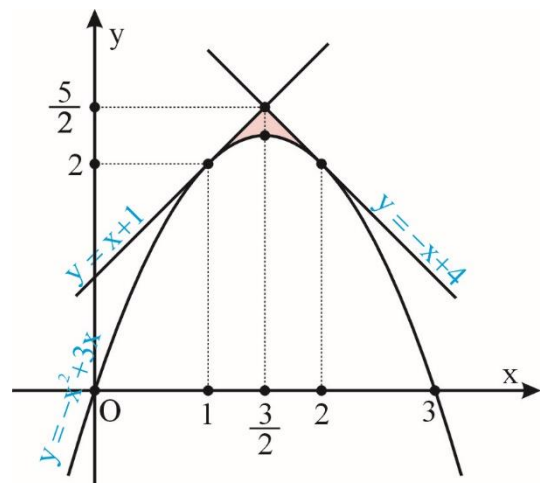
Είναι $f(2) = -2^2 + 3 \cdot 2 = 2$ (1) και $f'(2) = -2 \cdot 2 + 3 = -1$ (2)

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο με τετμημένη 2 θα είναι

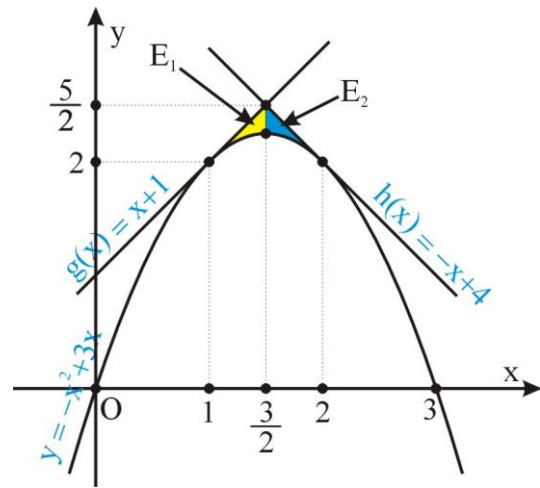
$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y - 2 = -1 \cdot (x - 2) \Rightarrow \boxed{y = -x + 4}$$

β) Επειδή έχουμε τρεις συναρτήσεις, θα πρέπει να κάνουμε σχήμα

Το ζητούμενο εμβαδό E είναι το εμβαδό του χρωματισμένου χωρίου του διπλανού σχήματος



Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδό θα το χωρίσουμε σε δύο χωρία E_1 και E_2 όπως φαίνεται στο σχήμα, στο οποίο η εφαπτόμενη $y = x + 1$ είναι στην ουσία η συνάρτηση g με $g(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και η εφαπτόμενη $y = -x + 4$ είναι στην ουσία η συνάρτηση h με $h(x) = -x + 4$, $x \in \mathbb{R}$



Έτσι λοιπόν έχουμε (λόγω σχήματος δεν χρειαζόμαστε τα απόλυτα)

$$E = E_1 + E_2 =$$

$$= \int_1^{\frac{3}{2}} [g(x) - f(x)] dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 [h(x) - f(x)] dx =$$

$$= \int_1^{\frac{3}{2}} [x + 1 + x^2 - 3x] dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 [-x + 4 + x^2 - 3x] dx =$$

$$= \int_1^{\frac{3}{2}} (x^2 - 2x + 1) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 (x^2 - 4x + 4) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_1^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_{\frac{3}{2}}^2 =$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 1\right) + \frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3} - 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{27}{24} - \frac{9}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{27}{24} + \frac{18}{4} - 6 = \frac{3}{2} + \frac{7}{3} + \frac{9}{4} - 6 = \frac{18 + 28 + 27 - 72}{12} = \frac{1}{12}$$

32.11 9)

α) Είναι $x^2 = 2y - 4 \Rightarrow 2y = x^2 + 4 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + 2$

Οπότε η παραβολή C είναι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2$, με $f'(x) = x$

Έστω ότι η ζητούμενη εφαπτόμενη εφάπτεται στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Επομένως έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (1)

Επειδή όμως η εφαπτόμενη αυτή διέρχεται από την αρχή των αξόνων, θα πρέπει σημείο $(0,0)$ να ικανοποιεί την εξίσωση (1)

Επομένως θα πρέπει

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \quad \begin{matrix} f(x_0) = \frac{x_0^2}{2} + 2 \\ f'(x_0) = x_0 \end{matrix} \Rightarrow -\frac{x_0^2}{2} - 2 = x_0(-x_0) \Rightarrow -x_0^2 - 4 = -2x_0^2 \Rightarrow x_0^2 = 4 \Rightarrow x_0 = \pm 2$$

Άρα υπάρχουν δύο εφαπτόμενες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων, οι οποίες εφάπτονται στα σημεία της C_f με τετμημένες $x_{01} = -2$ και $x_{02} = 2$ οπότε έχουν αντίστοιχα εξισώσεις

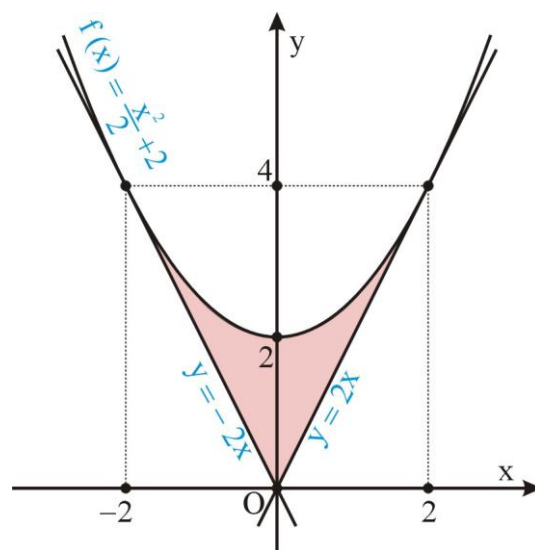
$$y - f(-2) = f'(-2)(x + 2) \quad \begin{matrix} f(-2) = 4, f'(-2) = -2 \end{matrix} \Rightarrow y - 4 = -2(x + 2) \Rightarrow \boxed{y = -2x}$$

και

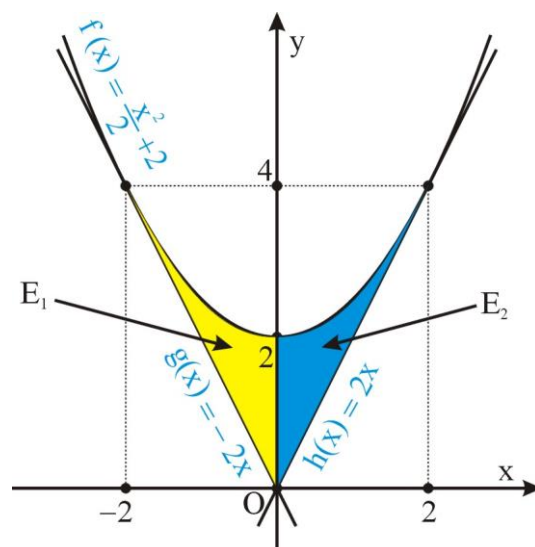
$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \quad \begin{matrix} f(2) = 4, f'(2) = 2 \end{matrix} \Rightarrow y - 4 = 2(x - 2) \Rightarrow \boxed{y = 2x}$$

β) Επειδή έχουμε τρεις συναρτήσεις, θα πρέπει να κάνουμε σχήμα

Το ζητούμενο εμβαδό E είναι το εμβαδό του χρωματισμένου χωρίου του διπλανού σχήματος



Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδό θα το χωρίσουμε σε δύο χωρία E_1 και E_2 όπως φαίνεται στο σχήμα, στο οποίο η εφαπτόμενη $y = -2x$ είναι στην ουσία η συνάρτηση g με $g(x) = -2x$, $x \in \mathbb{R}$ και η εφαπτόμενη $y = 2x$ είναι στην ουσία η συνάρτηση h με $h(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$



Έτσι λοιπόν έχουμε (λόγω σχήματος δεν χρειαζόμαστε τα απόλυτα)

$$E = E_1 + E_2 =$$

$$= \int_{-2}^0 [f(x) - g(x)] dx + \int_0^2 [f(x) - h(x)] dx =$$

$$= \int_{-2}^0 \left(\frac{x^2}{2} + 2 + 2x \right) dx + \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} + 2 - 2x \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} + 2x + x^2 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^3}{6} + 2x - x^2 \right]_0^2 =$$

$$= 0 - \left(\frac{(-2)^3}{6} + 2(-2) + (-2)^2 \right) + \frac{2^3}{6} + 2 \cdot 2 - 2^2 - 0 =$$

$$= 0 - \left(-\frac{8}{6} - \cancel{4} + \cancel{4} \right) + \frac{8}{6} + \cancel{4} - \cancel{4} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$