

30.33

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = F(x)e^{-x}$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = F'(x)e^{-x} - e^{-x}F(x) \stackrel{F'(x)=f(x)}{\Rightarrow} h'(x) = e^{-x}f(x) - e^{-x}F(x)$$

και

$$\left. \begin{array}{l} h(\alpha) = e^{-\alpha}F(\alpha) \stackrel{F(\alpha)=0}{=} 0 \\ h(\beta) = e^{-\alpha}F(\beta) \stackrel{F(\beta)=0}{=} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{-\xi}f(\xi) - e^{-\xi}F(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{-\xi}[f(\xi) - F(\xi)] = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - F(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{F(\xi) = f(\xi)}$$