Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

30.32

Επειδή η εφαπτομένη της στο σημείο $A\left(3,\frac{4}{3}\right)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=2$ θα

ισχύει $f(3)=\frac{4}{3}$ και $f'(3)=2$

Ακόμη

$$f''(2x-1)=x-\frac{1}{2}\Rightarrow 2f''(2x-1)=2x-2\frac{1}{2}\Rightarrow\left[f'(2x-1)\right]'=2x-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[f'(2x-1)\right]'=2x-1\Rightarrow\left[f'(2x-1)\right]'=\left(x^2-x\right)'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(2x-1)=x^2-x+c_1\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=2x-1\\ \Rightarrow x=\frac{y+1}{2}}}{\Rightarrow} f'(y)=\left(\frac{y+1}{2}\right)^2-\frac{y+1}{2}+c_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(y)=\frac{y^2+2y+1}{4}-\frac{y+1}{2}+c_1\Rightarrow f'(y)=\frac{y^2+\cancel{2y}+1-\cancel{2y}-2}{4}+c_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(y)=\frac{y^2-1}{4}+c_1$$

Όμως

$$f'(3)=2\Rightarrow\frac{3^2-1}{4}+c_1=2\Rightarrow 2+c_1=2\Rightarrow c_1=0$$

Άρα

$$(1)\overset{c=0}{\Rightarrow}f'(y)=\Rightarrow f'(y)=\frac{y^2-1}{4}\Rightarrow f'(y)=\left(\frac{\frac{y^3}{3}-y}{4}\right)'\Rightarrow f'(y)=\left(\frac{y^3-3y}{12}\right)'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(y)=\frac{y^3-3y}{12}+c_2\ (2)$$

Όμως

$$f(3)=\frac{4}{3}\overset{(2)}{\Rightarrow}\frac{3^3-3\cdot 3}{12}+c_2=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{18}{12}+c_2=\frac{16}{12}\Rightarrow c_2=-\frac{2}{12}$$

Άρα τελικά

$$(2)\overset{c=-\frac{2}{12}}{\Rightarrow}f(y)=\frac{y^3-3y}{12}-\frac{2}{12}\Rightarrow f(y)=\frac{y^3-3y-2}{12}\quad,\quad y\in R$$