

Επειδή η F είναι μια αρχική της $\frac{1}{1+x^2}$, θα ισχύει $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} h'(x) &= F'(x) + F'\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) \stackrel{F'(x)=\frac{1}{1+x^2}}{=} \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Οπότε είναι $h(x) = c \Leftrightarrow F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = c$ (1)

Όμως

$$(1) \stackrel{\text{θέτουμε } x=1}{=} F(1) + F(1) \stackrel{F(1)=0}{=} c \Rightarrow c = 0 \quad (2)$$

Επομένως

$$(1), (2) \Rightarrow F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$