

Επειδή η F είναι μια αρχική της $\frac{1}{1+e^x}$, θα ισχύει $F'(x) = \frac{1}{1+e^x}$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = F(x) - F(-x)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} h'(x) &= F'(x) - F'(-x)(-x)' \stackrel{F'(x) = \frac{1}{1+e^x}}{=} \frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = \\ &= \frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \frac{1}{1+e^x} + \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1}{e^x+1} = 1, \text{ για κάθε } x \in [-a, a] \end{aligned}$$

Οπότε είναι $h'(x) = 1 \Leftrightarrow h'(x) = (x)' \Leftrightarrow h(x) = x + c \Leftrightarrow F(x) - F(-x) = x + c$ (1)

Όμως

$$(1) \stackrel{\text{θέτουμε } x=0}{=} F(0) - F(0) = 0 + c \Rightarrow c = 0 \quad (2)$$

Επομένως

$$(1), (2) \Rightarrow F(x) - F(-x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$