

30.23 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = xF(x)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = F(x) + xF'(x) \stackrel{F'(x)=f(x)}{\Rightarrow} h'(x) = F(x) + xf(x)$$

και

$$\left. \begin{array}{l} h(0) = 0 \cdot F(0) = 0 \\ h(1) = 1 \cdot F(1) \stackrel{F(1)=0}{=} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(0) = h(1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0,1]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (0,1)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow F(\xi) + \xi f(\xi) = 0$$

30.23 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = \frac{F(x)}{x}$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = \frac{x F'(x) - F(x)}{x^2} \stackrel{F'(x)=f(x)}{\Rightarrow} h'(x) = \frac{x f(x) - F(x)}{x^2}$$

και

$$\left. \begin{array}{l} h(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\alpha} \stackrel{F(\alpha)=0}{=} 0 \\ h(\beta) = \frac{F(\beta)}{\beta} \stackrel{F(\beta)=0}{=} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi f(\xi) - F(\xi)}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow \xi f(\xi) - F(\xi) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\xi f(\xi) = F(\xi)}$$

30.23 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = F(x)G(x)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) \stackrel{\substack{F'(x)=f(x) \\ G'(x)=g(x)}}{\Rightarrow} h'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x)$$

και

$$\left. \begin{array}{l} h(\alpha) = F(\alpha)G(\alpha) \stackrel{F(\alpha)=0}{=} 0 \\ h(\beta) = F(\beta)G(\beta) \stackrel{G(\beta)=0}{=} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[a, b]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(\xi)G(\xi) + F(\xi)g(\xi) = 0}$$

30.23 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[a, b]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = \frac{F'(x)G(x) - F(x)G'(x)}{G^2(x)} \stackrel{F'(x)=f(x), G'(x)=g(x)}{\Rightarrow} h'(x) = \frac{f(x)G(x) - F(x)g(x)}{G^2(x)}$$

και

$$\left. \begin{aligned} h(a) &= \frac{F(a)}{G(a)} \stackrel{F(a)=0}{=} 0 \\ h(b) &= \frac{F(b)}{G(b)} \stackrel{F(b)=0}{=} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(a) = h(b)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[a, b]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\xi)G(\xi) - F(\xi)g(\xi)}{G^2(\xi)} = 0 \Leftrightarrow f(\xi)G(\xi) - F(\xi)g(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(\xi)G(\xi) = F(\xi)g(\xi)}$$

30.23 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = F(x) - \frac{x^2}{2}$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = F'(x) - \frac{2x}{2} \stackrel{F'(x)=f(x)}{\Rightarrow} h'(x) = f(x) - x$$

και

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= F(0) - \frac{0^2}{2} = F(0) \\ h(1) &= F(1) - \frac{1^2}{2} = F(1) - \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \stackrel{F(1)=F(0)+\frac{1}{2}}{\Rightarrow} h(0) = h(1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[a, b]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - \xi = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(\xi) = \xi}$$

30.23 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = F(x) \cdot f(x)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = F'(x) \cdot f(x) + F(x) \cdot f'(x) \stackrel{F'(x)=f(x)}{\Rightarrow} h'(x) = f^2(x) + F(x) \cdot f'(x)$$

και

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= F(\alpha) \cdot f(\alpha) \stackrel{F(\alpha)=0}{=} 0 \\ h(\beta) &= F(\beta) \cdot f(\beta) \stackrel{F(\beta)=0}{=} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f^2(\xi) + F(\xi) \cdot f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \boxed{F(\xi) \cdot f'(\xi) = -f^2(\xi)}$$

30.23 7)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = F(x)(x - \beta)$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = F'(x)(x - \beta) + F(x) \stackrel{F'(x)=f(x)}{\Rightarrow} h'(x) = f(x)(x - \beta) + F(x)$$

και

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= F(\alpha)(\alpha - \beta) \stackrel{F(\alpha)=0}{=} 0 \\ h(\beta) &= F(\beta)(\beta - \beta) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi)(\xi - \beta) + F(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi)(\xi - \beta) = -F(\xi) \stackrel{\xi \neq \beta}{\Leftrightarrow} f(\xi) = -\frac{F(\xi)}{\xi - \beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(\xi) = \frac{F(\xi)}{\beta - \xi}}$$

30.23 8)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = F(x)e^x$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = F'(x)e^x + F(x)e^x \stackrel{F'(x)=f(x)}{\Rightarrow} h'(x) = f(x)e^x + F(x)e^x$$

και

$$\left. \begin{aligned} h(\alpha) &= F(\alpha)e^\alpha \stackrel{F(\alpha)=0}{=} 0 \\ h(\beta) &= F(\beta)e^\beta \stackrel{F(\beta)=0}{=} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi)e^\xi + F(\xi)e^\xi = 0 \Leftrightarrow e^\xi [f(\xi) + F(\xi)] = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(\xi) + F(\xi) = 0}$$