

**30.18 1)**

Αν προσπαθήσουμε να λύσουμε την άσκηση με το Θεώρημα Bolzano για την συνάρτηση  $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ , θα διαπιστώσουμε ότι οι τιμές  $f(0)$  και  $f(1)$  δεν είναι ετερόσημες  
Κατόπιν αυτού σκεφτόμαστε το Θεώρημα Rolle. Έτσι

Θεωρούμε την συνάρτηση  $F: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$F(x) = 4 \frac{x^4}{4} + 3 \frac{x^3}{3} - 6 \frac{x^2}{2} + x = x^4 + x^3 - 3x^2 + x$$

Η συνάρτηση  $F$

είναι συνεχής στο  $[0,1]$ , ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο  $(0,1)$ , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$F'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$$

$$\left. \begin{aligned} F(0) &= 0^4 + 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 0 = 0 \\ F(1) &= 1^4 + 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow F(0) = F(1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση  $F$  ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $[0,1]$  και επομένως η  $F'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ , άρα και η εξίσωση  $4x^3 + 3x^2 - 6x + 1 = 0$ , έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0,1)$

**30.18 2)**

Αν προσπαθήσουμε να λύσουμε την άσκηση με το Θεώρημα Bolzano για την συνάρτηση  $f(x) = 10x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ , θα διαπιστώσουμε ότι οι τιμές  $f(0)$  και  $f(1)$  δεν είναι ετερόσημες  
Κατόπιν αυτού σκεφτόμαστε το Θεώρημα Rolle. Έτσι

Θεωρούμε την συνάρτηση  $F: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$F(x) = 10 \frac{x^5}{5} - 8 \frac{x^4}{4} + 3 \frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^2}{2} + x = 2x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 + x$$

Η συνάρτηση  $F$

είναι συνεχής στο  $[0,1]$ , ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο  $(0,1)$ , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$F'(x) = 10x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 4x + 1$$

$$\left. \begin{aligned} F(0) &= 2 \cdot 0^5 - 2 \cdot 0^4 + 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 0 = 0 \\ F(1) &= 2 \cdot 1^5 - 2 \cdot 1^4 + 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow F(0) = F(1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση  $F$  ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $[0,1]$  και επομένως η  $F'(x) = 10x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ , άρα και η εξίσωση  $10x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$ , έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0,1)$

**30.18 3)**

Αν προσπαθήσουμε να λύσουμε την άσκηση με το Θεώρημα Bolzano για την συνάρτηση  $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ , θα διαπιστώσουμε ότι οι τιμές  $f(0)$  και  $f(1)$  δεν είναι ετερόσημες

Κατόπιν αυτού σκεφτόμαστε το Θεώρημα Rolle. Έτσι

Θεωρούμε την συνάρτηση  $F:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $F(x) = \alpha x + \frac{\beta x^2}{2} + \frac{\gamma x^3}{3} + \frac{\delta x^4}{4}$

Η συνάρτηση  $F$

είναι συνεχής στο  $[0,1]$ , ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο  $(0,1)$ , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$F'(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$$

$$\left. \begin{aligned} F(0) &= \alpha \cdot 0 + \frac{\beta \cdot 0^2}{2} + \frac{\gamma \cdot 0^3}{3} + \frac{\delta \cdot 0^4}{4} = 0 \\ F(1) &= \alpha \cdot 1 + \frac{\beta \cdot 1^2}{2} + \frac{\gamma \cdot 1^3}{3} + \frac{\delta \cdot 1^4}{4} = \alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{3} + \frac{\delta}{4} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow F(0) = F(1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση  $F$  ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $[0,1]$  και επομένως η  $F'(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ , άρα και η εξίσωση  $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 = 0$ , έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0,1)$

### 30.18 4)

Αν προσπαθήσουμε να λύσουμε την άσκηση με το Θεώρημα Bolzano για την συνάρτηση  $f(x) = \alpha_5 x^5 + \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ , θα διαπιστώσουμε ότι οι τιμές  $f(0)$  και  $f(1)$  δεν είναι ετερόσημες

Κατόπιν αυτού σκεφτόμαστε το Θεώρημα Rolle. Έτσι

Θεωρούμε την συνάρτηση  $F:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$F(x) = \frac{\alpha_5 x^6}{6} + \frac{\alpha_4 x^5}{5} + \frac{\alpha_3 x^4}{4} + \frac{\alpha_2 x^3}{3} + \frac{\alpha_1 x^2}{2} + \alpha_0 x$$

Η συνάρτηση  $F$

είναι συνεχής στο  $[0,1]$ , ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο  $(0,1)$ , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$F'(x) = \alpha_5 x^5 + \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$\left. \begin{aligned} F(0) &= \frac{\alpha_5 0^6}{6} + \frac{\alpha_4 0^5}{5} + \frac{\alpha_3 0^4}{4} + \frac{\alpha_2 0^3}{3} + \frac{\alpha_1 0^2}{2} + \alpha_0 0 = 0 \\ F(1) &= \frac{\alpha_5 \cdot 1^6}{6} + \frac{\alpha_4 \cdot 1^5}{5} + \frac{\alpha_3 \cdot 1^4}{4} + \frac{\alpha_2 \cdot 1^3}{3} + \frac{\alpha_1 \cdot 1^2}{2} + \alpha_0 \cdot 1 = \\ &= \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{3} + \frac{\alpha_3}{4} + \frac{\alpha_4}{5} + \frac{\alpha_5}{6} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow F(0) = F(1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση  $F$  ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $[0,1]$  και επομένως η  $F'(x) = \alpha_5 x^5 + \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ , άρα και η εξίσωση  $\alpha_5 x^5 + \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ , έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0,1)$