

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

30.16 1)

Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$ θα ισχύει

$$f(1) = 0$$

Ακόμη

$$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 2x+1 \Rightarrow \left(\sqrt{f(x)}\right)' = (x^2+x)' \Rightarrow \sqrt{f(x)} = x^2+x+c \quad (1)$$

$$(1) \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=1} \sqrt{f(1)} = 1^2+1+c \xRightarrow{f(1)=0} c = -2$$

Οπότε

$$(1) \xRightarrow{c=-2} \sqrt{f(x)} = x^2+x-2 \Rightarrow f(x) = (x^2+x-2)^2$$

30.16 2)

Έχουμε

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \left(e^{f(x)}\right)' = \left(x + \frac{1}{x}\right)' \Rightarrow e^{f(x)} = x + \frac{1}{x} + c \quad (1)$$

$$(1) \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=1} e^{f(1)} = 1 + \frac{1}{1} + c \xRightarrow{f(1)=\ln 2} e^{\ln 2} = 2 + c \Rightarrow 2 = 2 + c \Rightarrow c = 0$$

Οπότε

$$(1) \xRightarrow{c=0} e^{f(x)} = x + \frac{1}{x} \xRightarrow{x>0} f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow f(x) = \ln \frac{x^2+1}{x}$$

30.16 3)

Επειδή οι συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής εφαρμόζονται μόνο σε διαστήματα έχουμε ότι

Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι

$$f(x) + (x-1)f'(x) = 2x-2 \Rightarrow \left[(x-1)f(x)\right]' = (x^2-2x)' \Rightarrow \\ \Rightarrow (x-1)f(x) = x^2-2x+c \quad (1)$$

$$(1) \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=2} (2-1)f(2) = 2^2-2 \cdot 2+c \xRightarrow{f(2)=2} c = 2$$

Οπότε

$$(1) \Rightarrow (x-1)f(x) = x^2-2x+2 \xRightarrow{x>1} f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}, \text{ για κάθε } x \in (1, +\infty)$$

Ομοίως

Για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ είναι

$$f(x) + (x-1)f'(x) = 2x-2 \Rightarrow \left[(x-1)f(x)\right]' = (x^2-2x)' \Rightarrow \\ \Rightarrow (x-1)f(x) = x^2-2x+c \quad (2)$$

$$(2) \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=0} (0-1)f(0) = 0^2-2 \cdot 0+c \xRightarrow{f(0)=3} c = -3$$

Οπότε

$$(2) \Rightarrow \Rightarrow (x-1)f(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x-1}, \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 1)$$

$$\text{Επομένως τελικά είναι } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x-1}, & x < 1 \\ \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

30.16 4)

Για κάθε $x > 0$, έχουμε

$$xf'(x) = f(x) \Rightarrow xf'(x) - f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = c \Rightarrow f(x) = cx \quad (1)$$

$$(1) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=3} f(3) = c \cdot 3 \xrightarrow{f(3)=6} c = 2$$

Οπότε

$$(1) \xrightarrow{c=2} f(x) = 2x$$

30.16 5)

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$f(x)f'(x) = 2x^3 + 2x \Rightarrow 2f(x)f'(x) = 4x^3 + 4x \Rightarrow [f^2(x)]' = (x^4 + 2x^2)' \Rightarrow$$

$$f^2(x) = x^4 + 2x^2 + c \quad (1)$$

$$(1) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0} f^2(0) = 0^4 + 2 \cdot 0^2 + c \xrightarrow{f(0)=1} c = 1$$

Οπότε

$$(1) \xrightarrow{c=1} f^2(x) = x^4 + 2x^2 + 1 \Rightarrow f^2(x) = (x^2 + 1)^2 \xrightarrow{f(x)>0} f(x) = x^2 + 1$$

30.16 6)

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \Rightarrow (\ln|f(x)|)' = (x^2)' \Rightarrow \ln|f(x)| = x^2 + c \quad (1)$$

Προφανώς είναι $f(x) \neq 0$ και αφού η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής θα διατηρεί πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Και επειδή είναι $f(0) = 3$ θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Οπότε

$$(1) \xrightarrow{f(x)>0} \ln f(x) = x^2 + c \quad (2)$$

Ακόμη

$$(2) \xRightarrow{c=0} \ln f(0) = 0^2 + c \Rightarrow c = \ln 3$$

Και άρα

$$(2) \xRightarrow{c=\ln 3} \ln f(x) = x^2 + \ln 3 \Rightarrow f(x) = e^{x^2 + \ln 3} \Rightarrow f(x) = e^{x^2} e^{\ln 3} \Rightarrow f(x) = 3e^{x^2}$$

30.16 7)

Είναι $f(x) \neq 0$ και αφού η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής θα διατηρεί πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Και επειδή είναι $f(0) = 1 > 0$ θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x < 1$

Έτσι

$$4f'(x) = f^5(x) \xRightarrow{f(x) \neq 0} \frac{4f'(x)}{f^5(x)} = 1 \Rightarrow -\frac{4f'(x)}{f^5(x)} = -1 \Rightarrow [f^{-4}(x)]' = (-x)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-4}(x) = -x + c \Rightarrow \frac{1}{f^4(x)} = -x + c \quad (1)$$

Ακόμη

$$(1) \xRightarrow{x=0} \frac{1}{f^4(0)} = -0 + c \xRightarrow{f(0)=1} c = 1$$

Και άρα

$$(1) \xRightarrow{c=1} \frac{1}{f^4(x)} = 1 - x \Rightarrow f^4(x) = \frac{1}{1-x} \xRightarrow{f(x) > 0} f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{1-x}}, \text{ για κάθε } x < 1$$

30.16 8)

Είναι

$$f'(x) = f(x) \ln f(x) \xRightarrow{f(x) \neq 0} \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln f(x) \Rightarrow [\ln f(x)]' = \ln f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = ce^x \quad (1)$$

Ακόμη

$$(1) \xRightarrow{x=0} \ln f(0) = ce^0 \xRightarrow{f(0)=e^2} \ln e^2 = c \Rightarrow c = 2$$

Άρα

$$(1) \xRightarrow{c=2} \ln f(x) = 2e^x \Rightarrow f(x) = e^{2e^x}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

30.16 9)

Είναι

$$f'(x) = [4 - f(x)]^2 \xRightarrow{f(x) \neq 4} \frac{f'(x)}{[4 - f(x)]^2} = 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{4 - f(x)} \right]' = (x)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4 - f(x)} = x + c \quad (1)$$

Ακόμη

$$(1) \xRightarrow{x=0} \frac{1}{4 - f(0)} = 0 + c \xRightarrow{f(0)=3} \frac{1}{4-3} = 0 + c \Rightarrow c = 1$$

Άρα

$$(1) \xRightarrow{c=1} \frac{1}{4 - f(x)} = x + 1 \Rightarrow 4 - f(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f(x) = 4 - \frac{1}{x+1} \Rightarrow$$

$$f(x) = 4 - \frac{1}{x+1} \Rightarrow f(x) = \frac{4x+4-1}{x+1} \Rightarrow f(x) = \frac{4x+3}{x+1}, \text{ για κάθε } x > -1$$

