

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία (σελ. 225)

Α2. Θεωρία (σελ. 280)

Α3. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Λ

Α4. δ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η ευθεία $3x - y + 2007 = 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 3$

Επειδή ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , στο σημείο της $A(1, f(1))$, η οποία μάλιστα είναι παράλληλη στην ευθεία $3x - y + 2007 = 0$, συμπεραίνουμε ότι f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και μάλιστα $f'(1) = \lambda = 3$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + \alpha x + \beta - 1 - \alpha - \beta}{x - 1} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1) + \alpha(x-1)}{x-1} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1+\alpha)}{x-1} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + \alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 1$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{\gamma}{x} + 2 - (1^2 + \alpha \cdot 1 + \beta)}{x - 1} = 3$$

$$\stackrel{\alpha=1}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{\gamma}{x} - \beta}{x - 1} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\gamma - \beta x}{x(x-1)} = 3 \quad (1)$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 1^+} x(x-1) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^+} (\gamma - \beta x) = \gamma - \beta \text{ θα ισχύει } \gamma - \beta = 0 \Rightarrow \gamma = \beta \quad (2)$$

(διαφορετικά το $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\gamma - \beta x}{x(x-1)}$ θα ήταν άπειρο ή δεν θα υπήρχε)

Οπότε

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\beta - \beta x}{x(x-1)} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\beta \cancel{(x-1)}}{x \cancel{(x-1)}} = 3 \Rightarrow -\beta = 3 \Rightarrow \beta = -3$$

$$\text{Και } (2) \stackrel{\beta=-3}{\Rightarrow} \gamma = -3$$

B2. Η συνάρτηση f , με $\alpha = 1$, $\beta = -3$ και $\gamma = -3$, γίνεται

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3, & x \leq 1 \\ -\frac{3}{x} + 2, & x > 1 \end{cases}$$

και είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 1 \\ \frac{3}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$$

Και άρα θα είναι δύο φορές παραγωγίσιμη (με εξαίρεση ίσως το σημείο $x_0 = 1$, στο οποίο όμως είναι συνεχής) με

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 1 \\ -\frac{6}{x^3}, & x > 1 \end{cases}$$

Οπότε ο πίνακας κυρτότητας της f θα είναι

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$		$-$
$f(x)$			
		σ.κ. (1,-1)	

Στο σημείο καμπής $(1, -1)$ η εφαπτόμενη θα έχει εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y + 1 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 4$$

B3. Έστω $(x(t), y(t))$ οι συντεταγμένες του κινητού. Επειδή κινείται πάνω στην ευθεία ε θα ισχύει $y(t) = 3x(t) - 4$ (3)

επειδή η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 3 μονάδες/sec θα ισχύει $x'(t) = 3 \text{ μον} / \text{s}$ (4)

Οπότε

$$(3) \stackrel{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} y'(t) = 3x'(t) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} y'(t) = 9 \text{ μον} / \text{s}$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του θα είναι 9μον/s

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, άρα δεν έχει άλλη κατακόρυφη ασύμπτωτη

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$

Ομοίως

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f και στο $+\infty$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x^2} \cdot 2x \cdot x^2 - 2x \cdot \ln x^2}{x^4} = \frac{2x(1 - \ln x^2)}{x^4}$$

$$\text{Θα είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = e \Rightarrow x = \pm\sqrt{e}$$

Ο πίνακας μονοτονίας της f είναι ο παρακάτω

x	$-\infty$	$-\sqrt{e}$	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0		0	-
$f(x)$	0 ↗	$\boxed{\frac{1}{e}}$ ↘	$-\infty$ $-\infty$	$\boxed{\frac{1}{e}}$ ↗	0 ↘

Από τον πίνακα μονοτονίας βλέπουμε ότι

η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = -\sqrt{e}$, ίσο με $\frac{1}{e}$

επίσης παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = \sqrt{e}$, ίσο με $\frac{1}{e}$

$$\text{το σύνολο τιμών της είναι το } f(A) = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$$

Γ3. Από το προηγούμενο ερώτημα συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x \neq 0$ ισχύει

$$f(x) \leq \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{\ln x^2}{x^2} \leq \frac{1}{e} \Rightarrow e \ln x^2 \leq x^2 \Rightarrow \ln x^{2e} \leq x^2 \Rightarrow \ln x^{2e} \leq \ln e^{x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^{2e} \leq e^{x^2}$$

Γ4. Είναι $\ln x^2 = \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow \frac{\ln x^2}{x^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{4}$. Οπότε αρκεί να βρούμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{4}$

$$\text{Είναι } 0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{e}$$

Οπότε από τον πίνακα του ερωτήματος Γ2 παρατηρούμε ότι η f παίρνει την τιμή $\frac{1}{4}$, τέσσερις φορές,

μία ακριβώς στο διάστημα $(-\infty, -\sqrt{e})$

μία ακριβώς στο διάστημα $(-\sqrt{e}, 0)$

μία ακριβώς στο διάστημα $(0, \sqrt{e})$

μία ακριβώς στο διάστημα $(\sqrt{e}, +\infty)$

άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{4}$ έχει τέσσερις ακριβώς ρίζες

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon_1: y - f(0) = f'(0)(x - 0) \stackrel{f'(0)=1}{\Rightarrow} \varepsilon_1: y = x + f(0)$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(1, f(1))$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon_2: y - f(1) = f'(1)(x - 1) \stackrel{f'(1)=-1}{\Rightarrow} \varepsilon_2: y = -x + 1 + f(1)$$

Οπότε

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}, y_o\right) \in \varepsilon_1 \Rightarrow y_o = \frac{1}{2} + f(0) \quad (1)$$

και

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}, y_o\right) \in \varepsilon_2 \Rightarrow y_o = \frac{1}{2} + f(1) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow f(0) = f(1)$$

Δ2. Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - x^2 + x$

Η h είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ ως πρόσθεση συνεχών συναρτήσεων

Η h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 1)$ ως πρόσθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = f'(x) - 2x + 1$ (3)

$$\left. \begin{array}{l} h(0) = f(0) - 0^2 + 0 \Rightarrow h(0) = f(0) \\ h(1) = f(1) - 1^2 + 1 \Rightarrow h(1) = f(1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(0)=f(1) \\ \Rightarrow h(0)=h(1) \end{array}$$

Οπότε από το θεώρημα Rolle προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε

$$h'(x_0) = 0 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} f'(x_0) - 2x_0 + 1 = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0 - 1$$

Δ3. Επειδή η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $(0, 1)$ και παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$.

Οπότε επειδή $0 < x_0 < 1$, θα ισχύει ότι

η f' είναι συνεχής στο $(0, x_0)$ και παραγωγίσιμη στο $[0, x_0]$. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής θα υπάρχει $\xi_1 \in (0, x_0)$ και άρα $\xi_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1) = \frac{f'(x_0) - f'(0)}{x_0 - 0} \stackrel{f'(x_0)=2x_0-1, f'(0)=1}{\Rightarrow} f''(\xi_1) = \frac{2x_0 - 2}{x_0}$ (4)

ομοίως

η f' είναι συνεχής στο $(x_0, 1)$ και παραγωγίσιμη στο $[x_0, 1]$. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής θα υπάρχει $\xi_2 \in (x_0, 1)$ και άρα $\xi_2 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_2) = \frac{f'(1) - f'(x_0)}{1 - x_0} \stackrel{f'(x_0)=2x_0-1, f'(1)=-1}{\Rightarrow} f''(\xi_2) = \frac{-2x_0}{1 - x_0} \Rightarrow f''(\xi_2) = \frac{2x_0}{x_0 - 1}$ (5)

$$\text{Οπότε } (4), (5) \Rightarrow f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) = \frac{2x_0 - 2}{x_0} \cdot \frac{2x_0}{x_0 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) = \frac{4(x_0 - 1)}{x_0 - 1} \Rightarrow f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) = 4 \text{ με } \xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$$

Δ4. Επειδή η f' είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$, σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής θα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Επειδή το σύνολο τιμών της f' δεν είναι το $[-1, 1]$ είτε η ελάχιστη τιμή δεν είναι το -1 , είτε η μέγιστη τιμή δεν είναι το 1

και επειδή $f'(0)=1$ και $f'(1)=-1$ συμπεραίνουμε ότι η ελάχιστη τιμή της f' δεν είναι στο 1, είτε η μέγιστη τιμή της f' δεν είναι στο 0

Άρα η f' έχει ένα τουλάχιστον ακρότατο σε κάποιο εσωτερικό σημείο του διαστήματος $[0,1]$, έστω $x_1 \in (0,1)$, και επειδή η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει
 $f''(x_1)=0$

Άρα η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$