

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία (σελ. 113)

A2. Θεωρία (σελ. 164 , 165)

A3. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

A4. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ και $g(x) = |x|$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0) = f(0) = 0$. Όμως $(g \circ f)(x) = |x^2| = x^2$ η οποία προφανώς είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

ΘΕΜΑ Β

Η f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$$

$$f''(x) = -e^{-x} - (e^{-x} - xe^{-x}) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = -2e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2)$$

Είναι $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ με $f(2) = 2e^{-2}$

Τα πρόσημα της f'' η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$		σ.κ.	

Δηλαδή η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2]$, κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $(2, f(2) = 2e^{-2})$ δηλαδή στο $(1, 2e^{-2})$

ΘΕΜΑ Γ

α) Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x + 1 \Rightarrow f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα είναι 1-1

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f^{-1}(f(x)) = x \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} (f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1 \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=1} (f^{-1})'(f(1))f'(1) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(f(1))f'(1) = 1 \xrightarrow{\substack{f(1)=e^1+1-1=e \\ f'(1)=e^1+1=e+1}} (f^{-1})'(e)(1+e) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(e) = \frac{1}{1+e}$$

ΘΕΜΑ Δ

α) Επειδή η εφαπτόμενη της C_f στο $(3, f(3))$ είναι η $y = x$ σημαίνει ότι $f(3) = 3$

$$\text{και } f'(3) = 1$$

Οπότε

$$f(f'(x)) + f(x) = 0 \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=3} f(f'(3)) + f(3) = 0 \xrightarrow{\substack{f(3)=3 \\ f'(3)=1}} f(1) + 3 = 0 \Rightarrow f(1) = -3$$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = -3 < 0 \\ f(3) = 3 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) \cdot f(3) < 0$$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

Ακόμη

Η f' είναι συνεχής (αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη) και $f'(x) \neq 0$
Έτσι

$$\left. \begin{array}{l} f' \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \\ f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{η } f' \text{ διατηρεί} \\ \text{πρόσημο στο } \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$f'(3) = 1 > 0$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1 και επομένως η ρίζα x_0 που βρήκαμε παραπάνω είναι μοναδική στο $\mathbb{R}$

$$\beta) \text{ Είναι } f(f'(x)) + f(x) = 0 \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} f(f'(x_0)) + f(x_0) = 0 \xrightarrow{f(x_0)=0} f(f'(x_0)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(f'(x_0)) = f(x_0) \xrightarrow{f:1-1} f'(x_0) = x_0$$

Επομένως η εφαπτόμενη της C_f , στο σημείο της με τετμημένη x_0 έχει εξίσωση

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \xrightarrow{\substack{f(x_0)=0 \\ f'(x_0)=x_0}} y = x_0(x - x_0) \Rightarrow y = x_0(x - x_0)$$

Επειδή η παραπάνω εφαπτόμενη διέρχεται από το σημείο $(1, -2)$ θα ισχύει

$$-2 = x_0(1 - x_0) \Rightarrow -2 = x_0 - x_0^2 \Rightarrow x_0^2 - x_0 - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9 \quad x_{0_{1,2}} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{array}{l} \nearrow x_{0_1} = \frac{4}{2} = 2 \\ \searrow x_{0_2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{array}$$

Η τιμή $x_0 = -1$ απορρίπτεται διότι $f'(x_0) = x_0 \Rightarrow f'(-1) = -1$ άτοπο διότι

$$f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα $x_0 = 2$

$$\gamma) \text{ Εφόσον } x_0 = 2 \text{ θα ισχύει } \boxed{f(2) = 0} \text{ και } \boxed{f'(2) = 2}.$$

Ακόμη

$$f(f'(x)) + f(x) = 0 \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=1} f(f'(1)) + f(1) = 0 \xrightarrow{f(1)=-3} f(f'(1)) - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(f'(1)) = 3 \xrightarrow{f(3)=3} f(f'(1)) = f(3) \xrightarrow{f:1-1} \boxed{f'(1) = 3}$$

Έτσι

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) + f'(x-1) - x - 3}{x-2} \stackrel{\text{προσθαφαιρούμε } f'(2)=2}{=} \\
& = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f'(2) + f'(2) + f'(x-1) - x - 3}{x-2} \stackrel{f'(2)=2}{=} -5 \\
& = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f'(2)}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 + f'(x-1) - x - 3}{x-2} \stackrel{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f'(2)}{x-2} = f''(2)}{=} \\
& = f''(2) + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x-1) - x - 1}{x-2} \stackrel{\text{θέτουμε } y=x-1 \Rightarrow x=y+1 \text{ όταν } x \rightarrow 2 \text{ } y \rightarrow 1}{=} \\
& = f''(2) + \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f'(y) - (y+1) - 1}{y+1-2} = f''(2) + \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f'(y) - y - 2}{y-1} \stackrel{\text{προσθαφαιρούμε } f'(1)}{=} \\
& = f''(2) + \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f'(y) - f'(1) + f'(1) - y - 2}{y-1} \stackrel{f'(1)=3}{=} \\
& = f''(2) + \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f'(y) - f'(1)}{y-1} + \lim_{y \rightarrow 1} \frac{3 - y - 2}{y-1} \stackrel{f'(1)=3}{=} \\
& = f''(2) + f''(1) + \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1-y}{y-1} = f''(2) + f''(1) - 1 = -3 - 1 - 1 = -5
\end{aligned}$$

Διότι

$$\begin{aligned}
f(f'(x)) + f(x) &= 0 \stackrel{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} f'(f'(x))f''(x) + f'(x) = 0 \stackrel{\text{θέτουμε } x=2}{\Rightarrow} \\
\Rightarrow f'(f'(2))f''(2) + f'(2) &= 0 \stackrel{f'(2)=2}{\Rightarrow} f'(2)f''(2) + 2 = 0 \stackrel{f'(2)=2}{\Rightarrow} \\
\Rightarrow 2f''(2) + 2 &= 0 \Rightarrow \boxed{f''(2) = -1}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
f(f'(x)) + f(x) &= 0 \stackrel{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} f'(f'(x))f''(x) + f'(x) = 0 \stackrel{\text{θέτουμε } x=1}{\Rightarrow} \\
\Rightarrow f'(f'(1))f''(1) + f'(1) &= 0 \stackrel{f'(1)=3}{\Rightarrow} f'(3)f''(1) + 3 = 0 \stackrel{f'(3)=1}{\Rightarrow} \\
f''(1) + 3 &= 0 \Rightarrow \boxed{f''(1) = -3}
\end{aligned}$$

δ) Η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$,

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 2)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε

$$f''(\xi) = \frac{f'(2) - f'(1)}{2-1} \stackrel{f'(2)=2}{\Rightarrow} f''(\xi) = \frac{2-3}{1} \Rightarrow f''(\xi) = -1$$

Άρα $f''(2) = f''(\xi) = -1$ και βέβαια $\xi \neq 2$ αφού $\xi \in (1, 2)$. Οπότε η συνάρτηση

$f''(x)$ δεν είναι $1 - 1$