

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία (σελ. 106)

A2. Θεωρία (σελ. 162)

A3. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

A4. Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \neq 0$ με $f'(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -\frac{1}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (-\infty, 0]$ με

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0) \right] = (-\infty, 0]$$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_2 = (0, +\infty)$ με

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

Η f είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$ (διότι είναι 1-1 στο A_1 είναι 1-1 στο A_2 και

$f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset$) και προφανώς δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$

ΘΕΜΑ Β

Καταρχήν θα πρέπει

$$M \in C_f \Rightarrow f(1) = 3 \Rightarrow \alpha \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - \beta = 3 \Rightarrow \alpha - 3 - \beta = 3 \Rightarrow \alpha - \beta = 6 \quad (1)$$

Ακόμη επειδή θέλουμε η f να παρουσιάζει σημείο καμπής στο M θα πρέπει

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\alpha x^2 - 6x \\ f''(x) &= 6\alpha x - 6 \\ f''(1) &= 0 \Rightarrow 6\alpha \cdot 1 - 6 = 0 \Rightarrow 6\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 1 \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} 1 - \beta = 6 \Rightarrow \beta = -5$$

ΘΕΜΑ Γ

Επειδή η ευθεία $y = 4x + 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$, θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 4 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 4x] = 3$$

Επειδή η ευθεία $y = -2x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της g στο $+\infty$, θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) + 2x] = 1$$

Οπότε

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + 5x^2 + 1}{x^2 g(x) + 2x^3 - 4x^2 + 3} \stackrel{\text{διαϊρούμε με } x^2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}f(x) + \frac{5\cancel{x}^2}{\cancel{x}^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{\cancel{x}^2 g(x)}{\cancel{x}^2} + \frac{2\cancel{x}^3}{\cancel{x}^2} - \frac{4\cancel{x}^2}{\cancel{x}^2} + \frac{3}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} + 5 + \frac{1}{x^2}}{g(x) + 2x - 4 + \frac{3}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 4}{\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) + 2x] = 1} = \frac{4 + 5 + 0}{1 - 4 + 0} = \frac{9}{-3} = -3$$

$$\beta) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{διαϊρούμε με } x}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{g(x)}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 4}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -2} = \frac{4}{-2} = -2$$

Οπότε η ευθεία $y = -2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $\frac{f}{g}$ στο $+\infty$

γ) Είναι

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x) - g(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{g(x)}{x} \right] \stackrel{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 4}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -2 \quad 4 - (-2) = 6$$

$$\begin{aligned} \beta &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x) - \lambda x] \stackrel{\lambda=6}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x) - 6x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x) - 4x - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 4x] - \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) + 2x] = \\ &= 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $y = 6x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $f - g$ στο $+\infty$

ΘΕΜΑ Δ

$$f''(x) = f(x) \stackrel{\text{προσθέτουμε } f'(x)}{\Rightarrow} f''(x) + f'(x) = f'(x) + f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [f'(x) + f(x)]' = f'(x) + f(x) \Rightarrow f'(x) + f(x) = ce^x \quad (3)$$

$$\text{Ακόμη } (3) \stackrel{\text{θέτουμε } x=0}{\Rightarrow} f'(0) + f(0) = ce^0 \stackrel{\substack{f(0)=2 \\ f'(0)=0}}{\Rightarrow} c = 2$$

Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$(3) \stackrel{c=2}{\Rightarrow} f'(x) + f(x) = 2e^x \stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε με } e^x}{\Rightarrow} e^x f'(x) + e^x f(x) = 2e^{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [e^x f(x)]' = (e^{2x})' \Rightarrow e^x f(x) = e^{2x} + c_1 \Rightarrow f(x) = e^x + c_1 e^{-x} \quad (4)$$

$$\text{Όμως } (4) \stackrel{\text{θέτουμε } x=0}{\Rightarrow} f(0) = e^0 + c_1 e^{-0} \Rightarrow 2 = 1 + c_1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$\text{Οπότε για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } (4) \stackrel{c=1}{\Rightarrow} f(x) = e^x + e^{-x}$$