

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

29.2

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία (σελ. 99)

A2. Θεωρία (σελ. 161)

A3. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

A4. Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της f έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x$ (τον ίδιο της τον εαυτό) και προφανώς έχει άπειρα κοινά σημεία με αυτήν

ΘΕΜΑ Β

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{f(x)=2\sqrt{x}, f(1)=1^2-1+2=2}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cancel{2} \frac{1}{\sqrt{x}}}{\cancel{2} \sqrt{x}} = 1$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{f(x)=x^2-x+2, f(1)=1^2-1+2=2}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x + \cancel{2} - \cancel{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x - 1)}{\cancel{x - 1}} = 1$$

Παρατηρούμε ότι $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1}$, άρα $f'(1) = 1$

ΘΕΜΑ Γ

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο A , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x+1)(x-1) = 0 \stackrel{x>0}{\Rightarrow} x = 1 \text{ με } f(1) = 0$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			- 0 +	
$f(x)$				

είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

έχει

ολικό ελάχιστο στο $x_1 = 1$ ίσο με $f(1) = 0$

β) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (0, +\infty)$

Αρχικά ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (0, +\infty)$, ψάχνουμε για

κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 0$ (άκρο ανοιχτού διαστήματος του πεδίου ορισμού)

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1 - 2 \ln x) \stackrel{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty}{=} 0 - 1 - 2(-\infty) = +\infty, \text{ άρα η ευθεία}$$

$x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

Τώρα θα ψάξουμε πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες (μόνο στο $+\infty$)

Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1 - 2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} - \frac{2 \ln x}{x} \right) \stackrel{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1} = +\infty - 0 - 0 = +\infty$$

άρα η f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$

γ) Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1 - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x^2} \right) \stackrel{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0 \\ &= (+\infty)(1 - 0 - 0) = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1 - 2 \ln x) \stackrel{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty}{=} 0 - 1 - 2(-\infty) = +\infty$$

Οπότε με βάση το ερώτημα α)

στο διάστημα $A_1 = (0, 1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [0, +\infty)$$

ΘΕΜΑ Δ

Ισχύει $f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(\alpha)$ και $f(x) \geq f(\beta)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο $x_1 = \alpha$ και στο $x_1 = \beta$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(\alpha) = 0$ και $f'(\beta) = 0$

Ακόμη έχουμε ότι

Η συνάρτηση f επειδή είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη

είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$

Συνεχίζοντας έχουμε

Η συνάρτηση f' (επειδή η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη)

είναι συνεχής στο $[\alpha, \xi_1]$ και στο $[\xi_1, \beta]$

είναι παραγωγίσιμη στο (α, ξ_1) και στο (ξ_1, β)

και $f'(\alpha) = f'(\xi_1) = f'(\beta) = 0$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχουν $\xi_2 \in (\alpha, \xi_1)$ και $\xi_3 \in (\xi_1, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_2) = f''(\xi_3) = 0$

Τέλος η συνάρτηση f'' επειδή η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη

είναι συνεχής στο $[\xi_2, \xi_3]$, είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_2, ξ_3) και

$f''(\xi_2) = f''(\xi_3) = 0$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0 \in (\xi_2, \xi_3)$ οπότε $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'''(x_0) = 0$

